UNIVERSITÉ DE NANTES

Topologie des espaces métriques et calcul différentiel

X31M040

Licence de Mathématiques, 3ème année

Erwan Brugallé

10/12/2018

Erwan Brugallé, Université de Nantes, Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, 2 rue de la Houssinière, F-44322 Nantes Cedex 3, France
Email : `erwan.brugalle@math.cnrs.fr`

Préambule

Comme son nom l'indique, ce cours comporte deux parties principales : la topologie et le calcul différentiel.

La topologie fournit un langage permettant de décrire la "forme" d'objets de dimension quelconque. Si les objets du plan (voire de l'espace) semblent pouvoir raisonnablement se décrire à l'aide du langage courant, ce n'est là qu'une impression : ces descriptions reposent en effet sur de nombreux implicites, souvent cachés derrière des "on voit bien que...". Si cela suffit pour *parler* de mathématiques et faire passer des idées, il est en revanche impossible de *faire* des mathématiques sans avoir recours à un langage rigoureux et purgé de tout implicite. La topologie répond précisément à ce besoin pour la description de formes. Grâce à elle, il devient alors possible de parler d'espaces de *n'importe quelle* dimension échappant à priori à notre intuition géométrique immédiate.

Attention cependant à ne pas jeter le bébé avec l'eau du bain, et à reléguer notre intuition aux oubliettes. Bien au contraire, c'est justement en essayant de la formuler rigoureusement que des notions générales pertinentes apparaissent. Ainsi, l'intuition géométrique en dimension 2 et 3 est bien souvent indispensable à la compréhension d'un phénomène général, même si les démonstrations finales ne font plus explicitement référence à cette intuition.

Un cours élémentaire de topologie comme celui-ci peut donc être vu comme l'apprentissage d'une nouvelle langue, permettant non pas de dire autrement ce qu'on sait déjà exprimer dans sa langue natale, mais au contraire de parler d'objets qui nous étaient auparavant inaccessibles. Comme tout apprentissage linguistique, les débuts peuvent paraître arides, la formulation d'énoncés élémentaires demandant un travail initial conséquent. Mais une fois les rudiments de grammaire maîtrisés, l'étendue des discussions passionnantes est infinie !

Le calcul différentiel a pour objectif de généraliser aux fonctions de plusieurs variables la notion de dérivée d'une fonction d'une variable réelle. Cette dernière est en général définie comme limite de taux d'accroissement, ce qui fait appel en particulier à la division sur $\mathbb{R}$ (i.e. la structure de corps sur $\mathbb{R}$). Cette définition ne se généralise ainsi pas immédiatement à une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$, la division par un vecteur n'étant pas disponible pour $n \geq 2$. On obtient une généralisation satisfaisante de dérivée, appelée *différentielle*, en remplaçant les limites de taux d'accroissement par les développements limités à l'ordre 1. Au premier abord, cette perspective souffre d'une petite complication : la différentielle d'une fonction en un point, au lieu d'être un nombre (ou un vecteur) comme dans le cas d'une fonction d'une variable réelle, est maintenant une application linéaire. Mais une fois cette difficulté initiale dépassée, le calcul différentiel fournit un cadre agréable pour l'analyse à plusieurs variables. En particulier, de nombreux énoncés classiques d'analyse à une variable se généralisent en dimension plus grande : Inégalité des accroissements finis, Formules de Taylor, recherche d'extremum de fonctions, ...

Les résultats vus au chapitre Topologie sont indispensables à l'élaboration du calcul différentiel. En effet, une fonction d'une variable réelle est définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ (ou une union d'intervalles), dont la forme est assez simple. En revanche, une fonction de n variables est définie sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, dont la forme peut être très variée ! Les notions de compacité, complétude et connexité trouveront ainsi de belles applications au chapitre 2.

Faute de temps, ce chapitre ne comprend que la moitié d'un cours de base de calcul différentiel. Ce cours sera complété par le cours "Calcul différentiel et équations différentielles" (X32M040) au second semestre.

Tous les thèmes abordés dans ce cours sont classiques, et ce polycopié ne prétend à aucune originalité. De nombreux ouvrages ont été consacrés à ces sujets depuis moult décennies, parmi lesquels on peut citer de façon non exhaustive [Car67, Gos95, LFA72, Rou99, Ska04]. Le lecteur désirant bénéficier d'un autre éclairage, ou approfondir le sujet pourra s'y reporter.

Table des matières

Chapitre 1

Topologie des espaces métriques

Le point clef dans la description d'un objet X est de pouvoir dire quels sont les points "proches" d'un point donné de X. Dans la situation où l'on dispose d'un moyen de mesurer la distance entre deux points quelconques de X, cette question a une réponse évidente. De tels objets X sont appelés *espaces métriques*, et constituent une vaste classe incluant en particulier le plan, l'espace, et tous leurs sous-ensembles. À partir de cette notion élémentaire, il nous sera alors possible de donner un sens (et une réponse) aux questions suivantes : X est-il raisonnablement "petit" (compacité de X) ? X est-il "troué" (complétude de X) ? X est-il en un seul "morceaux" (connexité de X) ?

Nous étudions dans ce chapitre la topologie des espaces métriques. Ces espaces ont cependant quelques défauts, que l'on arrive à corriger en considérant une classe encore plus vaste d'objets : les *espaces topologiques.* Ces derniers sont très importants en mathématiques, vous les rencontrerez sûrement si vous y poursuivez vos études. Malheureusement, le volume horaire consacré à ce cours ne nous permettra pas d'aborder ces espaces topologiques au delà d'une simple digression. Sachez cependant qu'ils existent, vous serez ainsi moins intimidés lors de votre première rencontre.

Les espaces métriques sont une légère, mais féconde, généralisation des espaces vectoriels normés. Ces derniers ont été étudiés les années précédentes, et se révéleront indispensables au chapitre sur le calcul différentiel. Nous commencerons donc par un petit rappel.

1.1 Rappels sur les espaces vectoriels normés

Les résultats de cette section ont été vus (au moins les énoncés) les années précédentes.

1.1.1 Définition et premiers exemples

Un espace vectoriel normé est un espace vectoriel E où chaque vecteur a une longueur, appelée norme, compatible avec l'addition et la multiplication par un scalaire sur E.

Définition 1.1.1. *Un* espace vectoriel normé $(E, ||\cdot||)$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* E *muni d'une application, appelée* norme, $||\cdot|| : E \to \mathbb{R}^+$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

1. séparation *:* $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *;*

2. homogénéité *:* $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ ||\lambda \cdot x|| = |\lambda| \cdot ||x||$ *;*

3. inégalité triangulaire *:* $\forall x, y \in E,\ ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Remarque 1.1.2. On considère ici uniquement des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels dans un soucis de simplicité. Tous les énoncés se généralisent cependant immédiatement aux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels, en remplaçant la valeur absolue d'un nombre réel par le module d'un nombre complexe.

L'inégalité triangulaire peut se reformuler en "le chemin le plus court entre deux point est la ligne droite", voir la Figure 1.1 où l'inégalité est appliquée avec les vecteurs x et $-y$ (rappelons que par homogénéité, on a $|| - y|| = ||y||$).

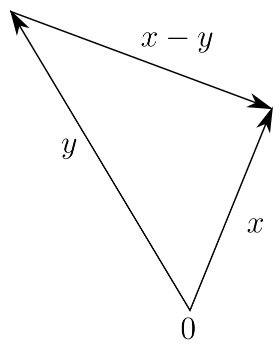


FIGURE 1.1 – Inégalité triangulaire : $||x - y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Exemple 1.1.3. $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue $|\cdot|$ est un espace vectoriel normé.

Exemple 1.1.4. On peut généraliser l'exemple 1.1.3 de plusieurs façons à $\mathbb{R}^n$. Voici trois exemples :

1. la norme infinie :

$$||(x_1, \cdots, x_n)||_\infty = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|);$$

2. la norme 1 :

$$||(x_1, \cdots, x_n)||_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|;$$

3. la norme euclidienne :

$$||(x_1, \cdots, x_n)||_2 = \left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le fait que $||\cdot||_\infty$ et $||\cdot||_1$ sont bien des normes sur $\mathbb{R}^n$ découle immédiatement des propriétés élémentaires de la valeur absolue. Il en est de même pour démontrer la propriété de séparation et d'homogénéité de $||\cdot||_2$, en revanche l'inégalité triangulaire n'est pas immédiate dans ce cas.

Démonstration de l'inégalité triangulaire pour $||\cdot||_2$. On rappelle l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leq ||x||_2 \cdot ||y||_2.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
||x+y||_2^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2\sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n y_i^2 \\
&\leq ||x||_2^2 + 2||x||_2 \cdot ||y||_2 + ||y||_2^2 \\
&\leq (||x||_2 + ||y||_2)^2.
\end{aligned}$$

Comme la fonction $x \to \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on obtient

$$||x+y||_2 \leq ||x||_2 + ||y||_2$$

ce qui est le résultat escompté. ☺

À tout hasard, on rappelle rapidement la preuve de Cauchy-Schwartz : La fonction

$$t \mapsto \sum (x_i + t y_i)^2 = \sum x_i^2 + 2t \sum x_i y_i + t^2 \sum y_i^2$$

est un polynôme de degré deux en t qui est toujours positif. Son discriminant est donc négatif, ce qui est exactement l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

Les trois normes de l'exemple 1.1.4 s'étendent à des espaces de suites de dimension infinie. La dimension infinie comportant de nombreuses subtilités supplémentaires par rapport à la dimension finie, chacune de ces trois normes se généralise à un espace de suites différent.

Proposition 1.1.5. *Soit l^∞ l'espace des suites réelles $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornées. Alors*

$$||x||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

définit une norme sur l^∞.

Démonstration. Si $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = 0$, alors forcément $x_n = 0$ pour tout n. De plus, on a

$$||\lambda \cdot x||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda \cdot x_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}}(|\lambda| \cdot |x_n|) = |\lambda| \cdot \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = |\lambda| \cdot ||x||_\infty.$$

Enfin, puisque

$$||x+y||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n + y_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}(|x_n| + |y_n|) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| + \sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n| = ||x||_\infty + ||y||_\infty,$$

les trois axiomes d'une norme sont bien vérifiés. ☺

Proposition 1.1.6. *Soit l^1 l'espace des suites réelles $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum |x_n|$ converge. Alors l^1 est un espace vectoriel, et*

$$||x||_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

définit une norme sur l^1.

Démonstration. On montre d'abord que l^1 est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites réelles. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\sum_{n=1}^{m} |\lambda \cdot x_n| = \sum_{n=1}^{m} |\lambda \cdot x_n| = |\lambda| \cdot \sum_{n=1}^{m} |x_n| \leq |\lambda| \cdot ||x||_1,$$

et

$$\sum_{n=1}^{m} |x_n + y_n| \leq \sum_{n=1}^{m} |x_n| + \sum_{n=1}^{m} |y_n| \leq ||x||_1 + ||y||_1.$$

Donc $\lambda \cdot x$ et $x + y$ sont bien dans l^1. Ce dernier est donc bien un sous-espace vectoriel de l'espace des suites réelles. De plus, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda \cdot x_n| = |\lambda| \cdot ||x||_1 \qquad \text{et} \qquad ||x+y||_1 \leq ||x||_1 + ||y||_1.$$

Enfin, si

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = 0,$$

on a forcément que $x = 0$ par positivité des $|x_n|$. ☺

On laisse la preuve de la proposition suivante en exercice.

Proposition 1.1.7. *Soit l^2 l'espace des suites réelles $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum x_n^2$ converge. Alors l^2 est un espace vectoriel, et*

$$||x||_2 = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

définit une norme sur l^2.

Les espaces de fonctions à variable réelle sont encore plus "gros" que les espaces de suites réelles. De la même manière, on a les trois normes suivantes sur l'espace $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ des fonction continue $f : [0;1] \to \mathbb{R}$. La preuve de la proposition suivante est laissée en exercice.

Proposition 1.1.8. *Les trois fonctions suivantes sont des normes sur l'espace $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$:*

1. *la norme uniforme (ou infinie) :*
$$||f||_\infty = \max_{x\in[0;1]} |f(x)|$$
2. *la norme L_1 :*
$$||f||_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$$
3. *la norme L_2 :*
$$||f||_2 = \left(\int_0^1 f(x)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

L'ensemble des points d'un espace vectoriel normé situés à distance plus petite qu'un réel r donné d'un point x s'appelle une *boule de centre x et de rayon r*.

Définition 1.1.9. *Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé. Étant donné $x \in E$ et $r > 0$, la boule ouverte de centre x et de rayon r est définie par*

$$B(x,r) = \{y \in E \mid ||x-y|| < r\}.$$

La boule fermée de centre x et de rayon r est définie par

$$\overline{B}(x,r) = \{y \in E \mid ||x-y|| \leq r\}.$$

Attention, les boule d'un espace vectoriel normé $(E, ||\cdot||)$ dépendent non seulement de E, mais aussi de la norme $||\cdot||$, comme illustré à l'exemple 1.1.11.

Exemple 1.1.10. Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, on a les boules suivantes :

$$B(0,1) =]-1;1[, \qquad \overline{B}(0,1) = [-1;1], \qquad B(1,1) =]0;2[, \qquad \overline{B}(1,1) = [0;2].$$

Exemple 1.1.11. Les boules de centre 0 et rayon 1 pour chacune des trois normes introduites plus haut sur $\mathbb{R}^2$ sont représentées à la Figure 1.2.

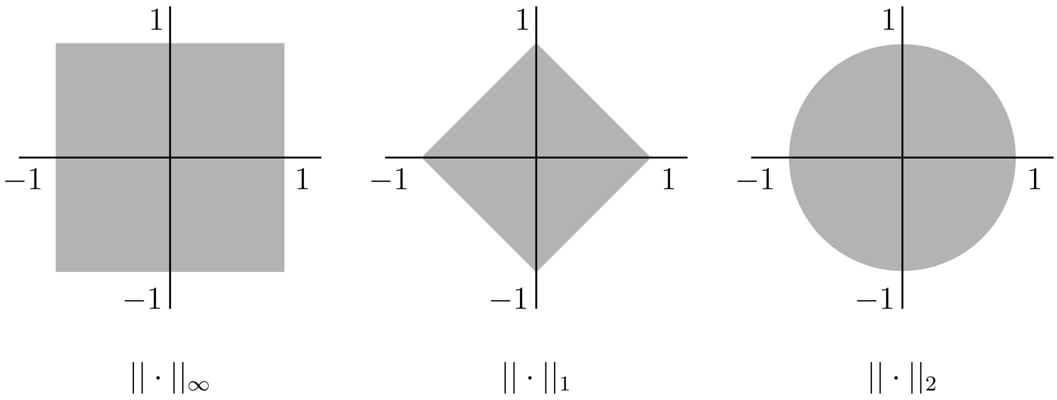


FIGURE 1.2 – Boule de centre 0 et rayon 1 sur $\mathbb{R}^2$ pour différentes normes.

1.1.2 Suites convergentes

La notion de norme permet de donner un sens rigoureux à l'affirmation "la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se rapproche de plus en plus du point x".

Définition 1.1.12. *Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in E$ si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \geq 0,\ \forall n \geq N,\ ||x_n - x|| < \varepsilon.$$

On utilise dans ce cas les notations

$$x = \lim_{n\to+\infty} x_n \qquad \text{ou} \qquad x_n \longrightarrow x$$

Exemple 1.1.13. La suite $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 dans $\mathbb{R}$. En effet, étant donné $\varepsilon > 0$, on peut prendre $N = \frac{1}{\varepsilon}$.

Exemple 1.1.14. La suite $(\frac{1}{1+n}, \frac{3n^2}{n^2+n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(0, 3)$ dans $\mathbb{R}^2$ pour les trois normes $||\cdot||_\infty$, $||\cdot||_1$, et $||\cdot||_2$. En effet, ces trois cas se déduisent du fait que

$$\lim \frac{1}{1+n} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim \frac{3n^2}{n^2+n-1} = 3.$$

La définition de limite d'une suite d'une espace vectoriel normé $(E, ||\cdot||)$ dépend à priori de la norme $||\cdot||$ considérée, tout comme les boules de $(E, ||\cdot||)$. Cependant, à l'inverse du cas des boules, il n'est pas immédiat de voir que la notion de limite dépende véritablement de $||\cdot||$, et pas uniquement de E.

Définition 1.1.15. *Soit E un espace vectoriel, et $||\cdot||$ et $||\cdot||'$ deux normes sur E. On dit que $||\cdot||$ et $||\cdot||'$ sont équivalentes si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E , la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in E$ pour $||\cdot||$ si et seulement si elle converge vers x pour $||\cdot||'$.*

Autrement dit, deux normes sont équivalentes si les deux notions de limite coïncident. Comme on peut s'en douter, il existe des normes qui ne sont pas équivalentes. Exhiber un exemple demande cependant un peu de réflexion.

Exemple 1.1.16. On se place dans $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$, muni des deux normes $||\cdot||_\infty$ et $||\cdot||_1$. On considère la suite de fonctions $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ de $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} n - n^3 x & \text{si } x \leq \frac{1}{n^2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

On calcule alors facilement

$$||f_n||_\infty = n \longrightarrow +\infty \qquad \text{et} \qquad ||f_n||_1 = \frac{1}{2n} \longrightarrow 0.$$

Ainsi la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ diverge pour $||\cdot||_\infty$, alors qu'elle converge vers la fonction nulle pour $||\cdot||_1$.

À la lueur de l'exemple précédent, le théorème suivant mérite réflexion. On en (re)donnera une démonstration à la section 1.4.4.

Théorème 1.1.17. *Toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes.*

Ainsi, la notion de convergence d'une suite et la limite correspondante ne dépend pas de la norme considérée sur un espace vectoriel de dimension finie. On peut donc omettre de préciser la norme en question lorsque l'on parle de convergence de suite dans $\mathbb{R}^n$.

1.1.3 Continuité

Étant donné deux espaces vectoriels normés, les fonctions entre ces deux espaces ayant un comportement "raisonnable" par rapport aux normes considérées jouissent de propriétés remarquables. Ce sont les *fonctions continues*.

Définition 1.1.18. *Soit $(E, ||\cdot||_E)$ et $(F, ||\cdot||_F)$ deux espaces vectoriels normés, et $f : E \to F$ une fonction. On dit que f est continue en un point x de E si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall y \in E,\ ||x-y||_E < \delta \Longrightarrow ||f(x) - f(y)||_F < \varepsilon.$$

On dit que f est continue sur E si elle est continue en tout point de E.

Exemple 1.1.19. L'application $||\cdot|| : E \to \mathbb{R}$ est continue sur E (prendre $\delta = \varepsilon$).

Exemple 1.1.20. L'application $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$. En effet, on a

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$

et donc pour $|x-y| \leq 1$, on a $|x+y| \leq 2|x|+1$ et donc

$$|x^2 - y^2| \leq (2|x|+1)|x-y|$$

et donc on peut prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{2|x|+1}$.

Exemple 1.1.21. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = 1$ si $x \neq 0$ n'est pas continue en 0 : on prend $\varepsilon = 1$, et pour tout $\delta > 0$, $|f(\frac{\delta}{2}) - f(0)| = 1$ alors que $|\frac{\delta}{2} - 0| < \delta$.

La proposition suivante est un cas particulier de la Proposition 1.2.23. D'après ce qu'on a vu sur les suites, elle implique que la notion de continuité ne change pas lorsqu'on remplace une norme par une norme équivalente.

Proposition 1.1.22 (Caractérisation séquentielle de la continuité)**.** *Soit* $(E, ||\cdot||_E)$ *et* $(F, ||\cdot||_F)$ *deux espaces vectoriels normés, et* $f : E \to F$ *une fonction. La fonction* $f : E \to F$ *est continue en* $x \in E$ *si et seulement si pour toute suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* E *telle que* $\lim x_n = x$*, on a* $\lim f(x_n) = f(x)$*.*

Exemple 1.1.23. Il suit de l'exemple 1.1.16 que l'application

$$Id : (\mathcal{C}([0;1], \mathbb{R}),\ ||\cdot||_1) \to (\mathcal{C}([0;1], \mathbb{R}),\ ||\cdot||_\infty)$$

n'est pas continue en 0.

1.1.4 Exercices

Exercice 1.1.1. Démontrer la Proposition 1.1.8.

Exercice 1.1.2. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont deux espaces vectoriels normés.

1. Montrer que f est continue sur E si et seulement si f est continue en 0.
2. Montrer que si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E convergeant vers 0, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans F, alors f est continue.
3. On considère maintenant l'espace des polynômes à coefficients réels $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|P\| := \sup\limits_k |a_k|$ si $P = \sum_{k=0}^{k=n} a_k X^k$.

   Vérifier que les applications suivantes sont linéaires et étudier leur continuité :
   (a) $\xi : E \to \mathbb{R}$ telle que $\xi(P) = P(0)$;
   (b) $\psi : E \to E$ telle que $\psi(P) = (X+1)P$;
   (c) $\varphi : E \to E$ telle que $\varphi(P) = P'$ le polynôme dérivé.

Exercice 1.1.3. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, et $f : E \to F$ une application linéaire continue. Montrer que si $\sum_{p=0}^{\infty} u_p$ est une série convergente de $(E, \|\cdot\|_E)$, alors la série $\sum_{p=0}^{\infty} f(u_p)$ est convergente dans $(F, \|\cdot\|_F)$ et a pour somme $f(\sum_{p=0}^{\infty} u_p)$.

1.2 Espaces métriques

Un moment d'attention montre que, bien souvent, l'élément important dans les preuves des énoncés de la Section 1.1 est la norme de la différence de deux vecteurs plutôt que la norme d'un vecteur. Autrement dit, c'est la distance entre deux vecteurs qui est cruciale, et non la norme des vecteurs en elle même. Cette observation suggère la notion d'espace métrique, où la notion de distance entre deux points existe, mais où les points eux même n'ont pas de norme. Cette généralisation d'apparence anodine a une conséquence intéressante : elle ne nécessite plus la notion d'espace vectoriel, et permet ainsi d'étudier beaucoup plus d'objets.

Les preuves des énoncés de cette section sont identiques à celle des énoncés de la section 1.1 en remplaçant la norme de la différence de deux vecteurs par la distance entre deux points.

1.2.1 Définition et premiers exemples

Définition 1.2.1. *Soit X un ensemble. Une* distance *sur X est une application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les trois propriétés suivantes :*

1. séparation *: $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;*
2. symétrie *: $\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$;*
3. inégalité triangulaire *: $\forall x, y, z \in X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (voir Figure 1.3) ;*

Le couple (X, d) est alors appelé un espace métrique.

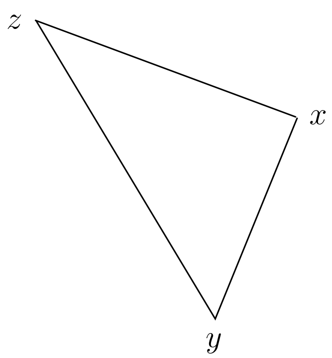


FIGURE 1.3 – Inégalité triangulaire : tout détour par y pour aller de x à z augmente la distance à parcourir

Exemple 1.2.2. Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé. Alors l'application

$$\begin{array}{rccc} d: & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (x, y) & \longmapsto & ||x - y|| \end{array}$$

est une distance sur E. Vérifions que d possède bien les trois propriétés d'une distance :

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow ||x - y|| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$;
2. $d(x, y) = ||x - y|| = ||y - x|| = d(y, x)$;
3. $d(x, z) = ||x - z|| = ||x - y + y - z|| \leq ||x - y|| + ||y - z|| = d(x, y) + d(y, z)$.

Exemple 1.2.3. Tout ensemble X admet la *métrique discrète* définie par

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette métrique est extrêmement grossière et ne nous apprend rien sur l'espace X. Elle montre cependant que les espaces métriques peuvent être plus “sauvage” que les espaces vectoriels normés. En particulier, il convient se méfier lorsque l'on veut transposer aux espaces métriques l'intuition que l'on a des espaces vectoriels normés (voir les Exemples 1.2.7 et 1.2.8).

La propriété suivante est évidente.

Proposition 1.2.4. *Soit (X, d) un espace métrique, et $Y \subset X$. Alors la restriction de d à Y est une distance sur Y, appelée* métrique induite par *d.*

En particulier, tout sous-ensemble d'un espace vectoriel normé est un espace métrique pour la distance induite par la norme. Cela permet d'exhiber une foule d'espaces métriques qui ne sont pas des espaces vectoriels normés.

Exemple 1.2.5. L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ ou } y = 0, \text{ et } x, y \in [0; 1]\}$ (i.e. l'union des intervalles $[0; 1]$ des deux axes de coordonnées de $\mathbb{R}^2$) muni de l'application

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$$

est un espace métrique.

Définition 1.2.6. *Soit (X, d) un espace métrique. Étant donné $x \in X$ et $r > 0$, la boule ouverte de centre x et de rayon r est définie par*

$$B(x, r) = \{y \in E \mid d(x, y) < r\}.$$

La boule fermée de centre x et de rayon r est définie par

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in E \mid d(x, y) \leq r\}.$$

Exemple 1.2.7. Pour la norme discrète sur X, on a $B(x, r) = \{x\}$ si $r \leq 1$ et $B(x, r) = X$ sinon et $\overline{B}(x, r) = \{x\}$ si $r < 1$ et $\overline{B}(x, r) = X$

Exemple 1.2.8. On considère l'espace métrique de l'exemple 1.2.5, et on pose $p = (\frac{1}{2}, 0)$. Alors on a les boules suivantes

$$B(p, \frac{1}{4}) =]\frac{1}{4}; \frac{3}{4}[\times \{0\}, \qquad \overline{B}(p, \frac{1}{4}) = [\frac{1}{4}; \frac{3}{4}] \times \{0\}, \qquad B(p, \frac{1}{2}) =]1; 1[\times \{0\},$$

$$\overline{B}(p, \frac{1}{2}) = B(p, 2) = \overline{B}(p, 2) = X.$$

Proposition 1.2.9. *Soit (X, d) un espace métrique, et $x \neq y$ deux points de X. Alors il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \cap B(y, r) = \emptyset$.*

Démonstration. Il suffit de prendre $r = \frac{d(x,y)}{2}$. En effet, si il existe $z \in B(x, r) \cap B(y, r)$, alors l'inégalité triangulaire implique

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < d(x, y),$$

ce qui est absurde. ☺

La propriété précédente montre qu'un espace métrique est ce que l'on appelle un espace *séparé*.

1.2.2 Suites convergentes

Définition 1.2.10. *Soit (X, d) un espace métrique, et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de X. On dit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $x \in X$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \geq 0, \ \forall n \geq N, \ d(x_n, x) < \varepsilon.$$

On utilise dans ce cas les notations

$$x = \lim_{n \to +\infty} x_n \qquad \text{ou} \qquad x_n \longrightarrow x.$$

Exemple 1.2.11. Une suite est convergente pour la distance discrète si et seulement si elle est constante à partir d'un certain rang. En effet, en prenant $\varepsilon \leq 1$, on voit que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x, alors $x_n \in B(x, \varepsilon) = \{x\}$ pour n assez grand.

Lemme 1.2.12 (Unicité de la limite)**.** *Soit (X, d) un espace métrique, et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de X. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x et x' dans X, alors $x = x'$.*

Démonstration. Par inégalité triangulaire on a pour tout n

$$d(x, x') \leq d(x, x_n) + d(x', x_n).$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \geq 0$ tel que $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ et $d(x', x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ pour $n \geq N$. On a donc

$$d(x, x') \leq \varepsilon$$

pour tout $\varepsilon > 0$, et donc $d(x, x') = 0$. Par la propriété de séparation, on a alors $x = x'$. ☺

Lemme 1.2.13. *Soit (X,d) un espace métrique, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de X. Alors*

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\geq 0,\ \forall n,m\geq N,\ d(x_n,x_m)<\varepsilon.$$

Démonstration. Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x\in X$, il existe $N\geq 0$ tel que $d(x_n,x)\leq\frac{\varepsilon}{2}$ pour $n\geq N$. Pour $n,m\geq N$, on a alors

$$d(x_n,x_m)\leq d(x_n,x)+d(x,x_m)<\varepsilon,$$

ce qui conclut la preuve. ☺

Comme dans le cas des espaces vectoriels normés, on a la notion de distances équivalentes.

Définition 1.2.14. *Deux métriques d_1 et d_2 sur un même ensemble X sont dites* équivalentes *si toute suite convergente pour d_1 est aussi convergente pour d_2, et que les limites coïncident.*

L'exemple 1.2.11 permet d'exhiber facilement des métriques non équivalentes sur un même espace (plus facilement que d'exhiber des normes non équivalentes sur un même espace vectoriel).

Exemple 1.2.15. La distance discrète sur $\mathbb{R}$ n'est pas équivalente à la distance induite par la valeur absolue. En effet, la suite $(\frac{1}{n})$ n'est pas constante à partir d'un certain rang, mais converge (vers 0) pour la valeur absolue.

La notion de suite extraite joue un rôle très important en topologie.

Définition 1.2.16. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un ensemble X. Une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $y_n=x_{\phi(n)}$ avec $\phi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ un application strictement croissante.*

Exemple 1.2.17. Les suites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites extraites de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Lemme 1.2.18. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un espace métrique (X,d), et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x\in X$, alors $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.*

Démonstration. On note $y_n=x_{\phi(n)}$ avec $\phi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ un application strictement croissante. Remarquons que la croissance stricte de ϕ implique que $\phi(n)\geq n$ pour tout n. Supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x\in X$.

Étant donné $\varepsilon>0$, il existe $N\geq 0$ tel que $d(x_n,x)<\varepsilon$ pour $n\geq N$. Puisque $\phi(n)\geq n$, on a alors $d(y_n,x)<\varepsilon$ pour $n\geq N$, et donc $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x aussi. ☺

La réciproque est fausse : la suite $x_n=(-1)^n$ ne converge pas dans $\mathbb{R}$ pour la valeur absolue, par contre les suites extraites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont constantes respectivement égales à 1 et -1, et donc convergent.

Définition 1.2.19. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un espace métrique (X,d). On dit que $x \in X$ est une* valeur d'adhérence *de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si il existe une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x.*

Exemple 1.2.20. Les valeurs d'adhérence, pour la valeur absolue, de la suite $((-1)^n)$ sont exactement 1 et -1. On déjà vu que ces deux valeurs sont des valeurs d'adhérence de la suite. Réciproquement, on peut voir la suite $((-1)^n)$ comme une suite de l'espace $\{1,-1\}$ muni de la métrique induite par la valeur absolue. Cette métrique est égale à deux fois la distance discrète sur $\{1,-1\}$, et donc toute suite convergente est constante à partir d'un certain rang d'après l'exemple 1.2.11. Ainsi, toute suite extraite de $((-1)^n)$ et convergente a nécessairement 1 ou -1 comme limite.

1.2.3 Continuité

Définition 1.2.21. *Soit (X,d_X) et (Y,d_Y) deux espaces métriques, et $f : X \to Y$ une fonction. On dit que f est continue en un point x de X si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall y \in X,\ d_E(x,y) < \delta \Longrightarrow d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

On dit que f est continue sur X si elle est continue en tout point de X.

En terme de boules, la fonction f est continue en x si et seulement si (voir la représentation schématique de la Figure 1.4)

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ f(B_X(x,\delta)) \subset B_Y(f(x),\varepsilon).$$

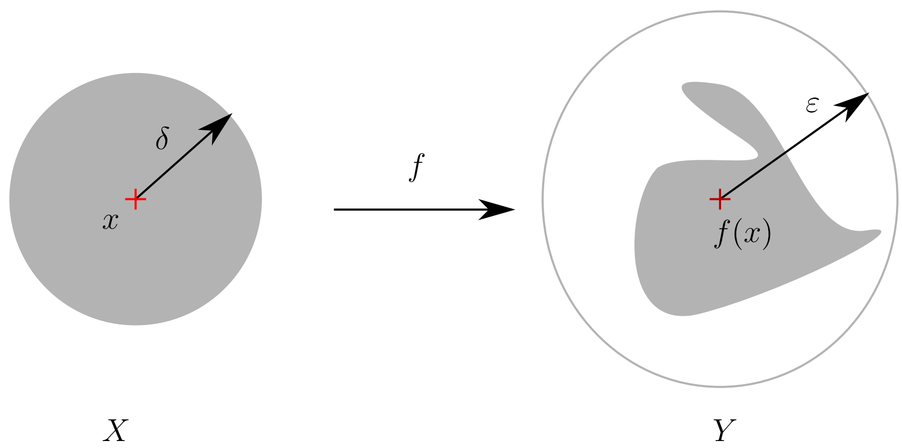


FIGURE 1.4 – Continuité de f au point $x \in X$

Exemple 1.2.22. Si X est muni de la distance discrète, alors toute application $f : X \to Y$ est continue. En effet, si $\delta \leq 1$, on a $d_E(x, y) < \delta$ implique $x = y$ et donc $d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon$ quel que soit ε.

On a une caractérisation séquentielle de la continuité similaire au cas des espaces vectoriels normés. En particulier, la Proposition 1.1.22 est un cas particulier de la Proposition suivante.

Proposition 1.2.23 (Caractérisation séquentielle de la continuité)**.** *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et $f : X \to Y$ une fonction. La fonction f est continue en $x \in X$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X telle que* $\lim x_n = x$*, on a* $\lim f(x_n) = f(x)$*.*

Démonstration. Supposons que f soit continue en x, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X telle que $\lim x_n = x$. On pose $y_n = f(x_n)$, et soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f en x, il existe $\delta > 0$ tel que

$$d_X(x, y) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Comme $x_n \to x$, il existe N tel que

$$n \geq N \Longrightarrow d_E(x, x_n) < \delta.$$

On obtient donc

$$n \geq N \Longrightarrow d_E(f(x), y_n) < \varepsilon,$$

i.e. $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

Supposons maintenant que f n'est pas continue en x. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in B_X(x, \frac{1}{n})$ tel que $d_Y(f(x), f(x_n)) \geq \varepsilon$. Par construction, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x, mais $f(x_n)$ ne converge pas vers $f(x)$. ☺

Proposition 1.2.24 (Continuité et composition)**.** *Soit (X, d_X) , (Y, d_Y), et (Z, d_Z) trois espaces métriques, et $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux fonctions. Si f est continue en $x \in X$ et g est continue en $f(x)$, alors la fonction $g \circ f : X \to Z$ est continue en x.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de g en $f(x)$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$d_Y(f(x), y) < \delta \Longrightarrow d_Z(g \circ f(x), g(y)) < \varepsilon.$$

Par continuité de f en x, il existe $\eta > 0$ tel que

$$d_X(x, y) < \eta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \delta.$$

On a donc bien

$$d_X(x, y) < \eta \Longrightarrow d_Z(g \circ f(x), g \circ f(y)) < \varepsilon,$$

ce qui assure la continuité de $g \circ f$ au point x. ☺

Proposition 1.2.25 (Continuité et combinaison linéaire)**.** *Soit* (X, d_X) *un espace métrique,* $(E, ||\cdot||)$ *un espace vectoriel normé, et* $f : X \to E$ *et* $g : Y \to Z$ *deux fonctions continues en* $x \in X$*. Alors pour tout* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*, la fonction* $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ *est continue en* x*.*

Démonstration. On peut supposer λ et μ non nuls sans perte de généralité. En effet, si $\lambda = 0$ (resp. $\mu = 0$), on remplace f (resp. g) par la fonction nulle et λ (resp. μ) par 1. Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f et g en x, il existe $\eta > 0$ tel que

$$d_X(x, y) < \eta \Longrightarrow ||f(x) - f(y)|| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda|} \qquad \text{et} \qquad ||g(x) - g(y)|| < \frac{\varepsilon}{2|\mu|}.$$

Par homogénéité et inégalité triangulaire, on a

$$||\lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x) - (\lambda \cdot f(y) + \mu \cdot g(y))|| \leq |\lambda| \cdot ||f(x) - f(y)|| + |\mu| \cdot ||g(x) - g(y)||,$$

et donc

$$d_X(x, y) < \eta \Longrightarrow ||\lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x) - (\lambda \cdot f(y) + \mu \cdot g(y))|| < \varepsilon,$$

ce qui assure la continuité de $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ au point x. ☺

Autrement dit, l'espace des application continue de X dans E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Si les fonctions continues constituent une classe importante de fonctions entre espaces métriques, les bijections continues dans les deux sens en forme une sous-classe encore plus particulière.

Définition 1.2.26. *Soit* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques, et* $f : X \to Y$ *une fonction. On dit que* f *est un* homéomorphisme *si* f *est une bijection, et si* f *et* f^{-1} *sont continues.*

Comme nous le verrons dans la suite, deux espaces métriques homéomorphes sont en général indistinguables d'un point de vue topologique. Remarquons qu'il ne suffit pas qu'une fonction continue f soit une bijection pour être un homéomorphisme, car cela n'entraîne pas automatiquement la continuité de f^{-1}.

Proposition 1.2.27. *Soit* X *un ensemble et* d_1 *et* d_2 *deux distances sur* X*. Alors* $Id : (X, d_1) \to (X, d_2)$ *est un homéomorphisme si et seulement si* d_1 *et* d_2 *sont équivalentes.*

Démonstration. Par définition, d_1 et d_2 sont équivalentes si et seulement si elles ont les même suites convergentes, ce qui est équivalent au fait que Id soit un homéomorphisme par la Proposition 1.2.3. ☺

Ainsi l'identité de $\mathbb{R}$, muni de la distance discrète, dans $\mathbb{R}$, muni de la distance usuelle, est une bijection continue mais qui n'est pas un homéomorphisme.

1.2.4 Continuité uniforme

Étant donné une fonction continue $f : X \to Y$ entre deux espaces métriques, il est important de remarquer que le paramètre δ à la Définition 1.2.21 dépend à priori du point $x \in X$ considéré. La continuité uniforme est une notion plus forte de la continuité, où ce paramètre peut être choisi *indépendemment* du point x.

Définition 1.2.28. *Soit* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques, et* $f : X \to Y$ *une fonction. On dit que* f *est* uniformément continue *sur* X *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in X,\ d_E(x, y) < \delta \Longrightarrow d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Exemple 1.2.29. La fonction $Id : (X, d) \to (X, d)$ est uniformément continue sur X.

Exemple 1.2.30. La fonction $\sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$. En effet, on a pour $x \geq y \geq 0$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x + y - 2\sqrt{xy} \leq x - y,$$

et donc

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x - y}.$$

On peut donc prendre $\delta = \varepsilon^2$.

Toute fonction uniformément continue est évidemment continue, cependant la réciproque n'est pas vraie, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 1.2.31. La fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. En effet, pour $\varepsilon = 1$ et $\delta > 0$, on a pour $y = x - \frac{\delta}{2}$

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = \frac{\delta}{2}(2x - \frac{\delta}{2}),$$

quantité plus grande que ε pour x assez grand.

Les fonctions lipschitziennes constituent une classe très importante de fonctions uniformément continues.

Définition 1.2.32. *Soit* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques, et* $f : X \to Y$ *une fonction. Étant donné* $k \in \mathbb{R}$, *on dit que* f *est* k*-lipschitzienne si*

$$\forall x, y \in X,\ d_F(f(x), f(y)) \leq k \cdot d_E(x, y).$$

Proposition 1.2.33. *Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.*

Démonstration. Il suffit de prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$. ☺

Exemple 1.2.34. La fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$, en revanche elle est lipschitzienne, et donc uniformément continue, sur tout intervalle borné $[a;b]$. En effet, pour $x, y \in [a;b]$, on a

$$|x^2 - y^2| = |(x-y)(x+y)| \leq 2|b| \cdot |x-y|.$$

Exemple 1.2.35. Pour $x \in X$, on définit la fonction *distance au point* x par

$$d_x : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ y & \longmapsto & d(x,y) \end{array}.$$

Alors la fonction d_x est 1-lipschitzienne par l'inégalité triangulaire, et est donc uniformément continue. En particulier, si $(E, ||\cdot||)$ est un espace vectoriel normé, l'application $x \mapsto ||x||$ est 1-lipschitzienne.

1.2.5 Exercices

Exercice 1.2.1. Soit (X,d) un espace métrique. Montrer que pour tout $x, y, z \in X$ on a

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y).$$

Exercice 1.2.2. Soit $X = ([0;1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0;1]) \subset \mathbb{R}^2$ muni de la distance induite par la norme infinie sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer les boules ouvertes et les boules fermées de X.

Exercice 1.2.3. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un espace métrique (X,d). Montrer que $x \in X$ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, le cardinal de l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in B(x,\varepsilon)\}$ est infini.

Exercice 1.2.4. Donner des exemples de suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède exactement k valeurs d'adhérence ($k = 0, 1, 2, 3$).
2. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une seule valeur d'adhérence mais est divergente.
3. L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $[0,1]$.

Exercice 1.2.5. `Exemples de métriques topologiquement équivalentes.`

Soit (X,d) un espace métrique et soit

$$d_1(x,y) = \min(1, d(x,y))$$
$$d_2(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}.$$

1. Montrer que (X, d_i) est un espace métrique pour $i = 1, 2$.

2. Dans chaque cas, prouver que les distances d et d_i sont équivalentes.

Exercice 1.2.6. `Métriques SNCF sur` $\mathbb{R}^2$.

On considère $\mathbb{R}^2$ muni de la métrique euclidienne usuelle d et on définit la métrique SNCF d' comme suit :

— Si x, y et 0 sont alignés alors $d'(x,y) = d(x,y)$.

— Sinon, $d'(x,y) = d(x,0) + d(y,0)$.

1. Montrer que d' est une métrique.
2. Décrire les boules ouvertes de d'.
3. Montrer qu'une suite x_n converge vers 0 pour d' si et seulement si elle converge vers 0 pour d.
4. Montrer que si x_n converge vers a pour d' alors elle converge vers a pour d.
5. Donner un exemple explicite de suite qui converge vers $a \neq 0$ pour d mais qui diverge pour d'.
6. L'inclusion $(\mathbb{R}^2, d) \to (\mathbb{R}^2, d')$ est-elle continue ? Et celle $(\mathbb{R}^2, d') \to (\mathbb{R}^2, d)$?

Exercice 1.2.7. `Fonctions continues sur un sous espace.`

Soit $f : X \to Y$ une application continue entre deux espaces métriques. Montrer que pour tout $A \subset X$, la restriction $f|_A : A \to Y$ est aussi continue, où A est muni de la métrique induite par X.

Donner un exemple où $f|_A$ est continue sans que f le soit.

1.3 Topologie d'un espace métrique

Dans cette section, nous introduisons les ouverts et les fermés d'un espace métrique, puis reformulons les propriétés de convergence et de continuité uniquement en termes de ces derniers. En particulier, ces reformulations ne font pas références explicitement à la distance. On verra alors émerger la notion nouvelle (malheureusement hors programme) d'*espaces topologiques*, pour lesquels les ouverts et les fermés sont donnés, et ne sont pas définis à l'aide d'une métrique.

Dans la suite de ce polycopié, nous ferons un effort particulier pour s'affranchir autant que possible des métriques, et pour formuler les énoncés et leur preuve uniquement en termes d'ouverts et de fermés. Nous n'utiliserons la distance uniquement lorsque cela s'avèrera nécessaire.

1.3.1 Ouverts, fermés, topologie

Définition 1.3.1. *Soit (X,d) un espace métrique. Un sous-ensemble $V \subset X$ est dit* ouvert *dans X si*

$$\forall x \in V,\ \exists \varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \subset V.$$

Remarque 1.3.2. Le réel ε dépend à priori de x !

Exemple 1.3.3. Tout espace métrique (X, d) contient au moins deux ouverts : l'ensemble vide $\emptyset$ et X tout entier.

Exemple 1.3.4. Tout sous-ensemble $V \subset X$ est un ouvert de X pour la distance discrète. En effet, $\{x\} = B(x, \frac{1}{2}) \subset V$ pour tout $x \in V$.

Lemme 1.3.5. *Soit (X, d) un espace métrique. Alors toute boule ouverte est un ouvert de X.*

Démonstration. Soit $y \in B(x, r)$, et $z \in B(y, s)$ avec $s \leq r - d(x, y)$ (voir Figure 1.5). Par inégalité triangulaire, on a

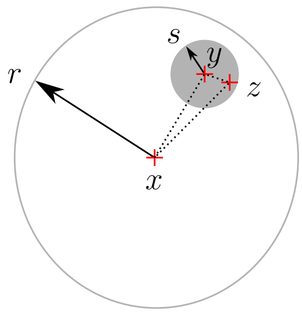


FIGURE 1.5 – Une boule ouverte est ouverte

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < r.$$

Donc $B(y, s) \subset B(x, r)$, et $B(x, r)$ est bien un ouvert de X. ☺

Exemple 1.3.6. Le segment ouvert $]-1; 1[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ pour la distance standard. Par contre $[-1; 1[$ n'est pas un ouvert : pour tout $\varepsilon > 0$, la boule ouverte $B(-1, \varepsilon)$ n'est pas incluse dans $[-1; 1[$, puisqu'elle contient par exemple $-1 - \frac{\varepsilon}{2}$.

Remarque 1.3.7. Il est très important de se souvenir que la notion d'ouvert est une notion *relative* et non intrinsèque : on est ouvert *dans un espace* X. Un ensemble peut être ouvert dans un espace et pas dans un autre. Par exemple, le segment $[-1; 1[$ n'est pas ouvert dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ d'après l'exemple 1.3.6, mais est ouvert dans lui même (pour la distance induite par la valeur absolue) par l'exemple 1.3.3.

Proposition 1.3.8 (Union et intersection d'ouverts)**.** *Soit (X, d) un espace métrique.*

1. *Une union quelconque d'ouverts de X est un ouvert de X.*
2. *Une intersection finie d'ouverts de X est un ouvert de X.*

Démonstration. Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts indexée par un ensemble I quelconque. Si $x \in \cup_{i\in I} O_i$, par définition il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in O_{I_0}$. Puisque O_{I_0} est un ouvert de X, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset O_{I_0}$. En particulier $B(x,\varepsilon) \subset \cup_{i\in I} O_i$, et $\cup_{i\in I} O_i$ est donc un ouvert.

Soit maintenant $O_1, \cdots, O_n$ un nombre fini d'ouverts de X, et soit $x \in \cap_{i=1}^n O_i$. Pour chaque O_i, il existe $\varepsilon_i > 0$ tel que $B(x,\varepsilon_i) \subset O_i$. En posant $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$, on a donc $B(x,\varepsilon) \subset \cap_{i=1}^n O_i$, et $\cap_{i=1}^n O_i$ est bien un ouvert de X. ☺

Remarque 1.3.9. L'hypothèse de finitude au point (2) ci dessus est indispensable. En effet, l'intervalle $]-\frac{1}{n};\frac{1}{n}[$ est un ouvert de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ pour tout $n > 0$, mais

$$\bigcap_{i=1}^{+\infty}]-\frac{1}{n};\frac{1}{n}[= \{0\}$$

n'est pas un ouvert de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

La notion d'ouvert d'un espace métrique va se révéler être fondamentale dans l'étude de ce dernier, finalement bien plus que la distance elle-même.

Définition 1.3.10. *Soit (X,d) un espace métrique. L'ensemble $\mathcal{O}(X)$ des ouverts de X s'appelle la* topologie de X associée à la distance d.

D'après ce qui précède, la topologie $\mathcal{O}(X)$ est un sous-ensemble de l'ensemble des parties de X stable par union, intersection finie, et qui contient $\emptyset$ et X.

Définition 1.3.11. *Soit (X,d) un espace métrique et $x \in X$. Un sous-ensemble $V \subset X$ est un* voisinage *de x dans X si il existe un ouvert O de x tel que*

$$x \in O \subset V.$$

Exemple 1.3.12. Un ouvert est un voisinage de chacun de ses points par le Lemme 1.3.5.

Il est important de noter qu'un voisinage d'un point n'est pas nécessairement un ouvert.

Exemple 1.3.13. L'intervalle $[-1;1[$ n'est pas un ouvert de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, mais est un voisinage de 0 puisque

$$0 \in]-1;1[\subset [-1;1[.$$

La notion de fermé d'un espace métrique est complémentaire de la notion d'ouverts.

Définition 1.3.14. *Soit (X,d) un espace métrique. Un sous-ensemble F de X est un* fermé *de X si son complémentaire $X \setminus F$ est un ouvert.*

Exemple 1.3.15. Puisque $\emptyset$ et X sont des ouverts de X, leur complémentaire X et $\emptyset$ sont de fermés de X. Ainsi $\emptyset$ et X sont à la fois des ouverts et des fermés de X.

Exemple 1.3.16. Comme $]-1;1[$ est un ouvert de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, l'ensemble $]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$ en est un fermé. Le segment $[-1;1[$ n'est pas un fermé de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, puisque son complémentaire $]-\infty;-1[\cup[1;+\infty[$ n'est pas un ouvert : toute boule ouverte centrée en 1 intersecte $[-1;1[$. Ainsi, le segment $[-1;1[$ n'est ni ouvert ni fermé dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Lemme 1.3.17. *Soit (X,d) un espace métrique. Alors toute boule fermée de X est un fermé de X.*

Démonstration. Il faut montrer sur $X \setminus \overline{B}(x,r)$ est un ouvert. Soit donc $y \in X \setminus \overline{B}(x,r)$, en particulier $d(x,y) > r$. Pour tout $z \in B(y,s)$ avec $s \leq d(x,y) - r$, on a $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (voir Figure 1.6), et donc

$$d(x,z) \geq d(x,y) - d(y,z) > d(x,y) - (d(x,y) - r) = r.$$

On a montré $B(y, d(x,y) - r) \subset X \setminus \overline{B}(x,r)$, donc $X \setminus \overline{B}(x,r)$ est bien un ouvert. ☺

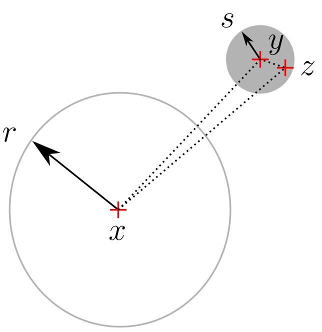


FIGURE 1.6 – Une boule fermée est fermée

Exemple 1.3.18. Le segment fermé $[-1;1]$ est un fermé de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Proposition 1.3.19 (Union et intersection de fermés)**.** *Soit (X,d) un espace métrique.*

1. *Une intersection quelconque de fermés de X est un fermé de X.*
2. *Une union finie de fermés de X est un fermé de X.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la propriété 1.3.8 et des deux identités

$$X \setminus \bigcap_{i \in I} F_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus F_i) \qquad \text{et} \qquad X \setminus \bigcup_{i \in I} F_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus F_i)\,.$$

☺

Exemple 1.3.20. Tout singleton de X est un fermé dans (X, d). En effet, on a

$$\{x\} = \bigcap_{r>0} \overline{B}(x, r).$$

La proposition suivante justifie la terminologie “fermé” : un ensemble de X est fermé si on ne peut pas en sortir.

Proposition 1.3.21 (Caractérisation séquentielle des fermés)**.** *Soit (X, d) un espace métrique, et soit $A \subset X$. Alors A est un fermé de X si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X convergeant vers $x \in X$, alors $x \in A$.*

Démonstration. Supposons A fermé dans X, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X convergeant vers $x \in X$. Si $x \notin A$, comme A est fermé il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$. Or $\lim x_n = x$, donc $x_n \in B(x, \varepsilon)$ pour n assez grand. Comme $x_n \in A$, on obtient une contradiction. Donc $x \in A$.

Supposons maintenant que A ne soit pas fermé dans X. Cela signifie que $X \setminus A$ n'est pas un ouvert de X, et que donc il existe $x \in X \setminus A$ tel que $B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$ pour tout entier $n > 0$. On peut donc choisir $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$. Par construction, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de A qui converge vers $x \in X \setminus A$. ☺

On peut reformuler la notion de continuité uniquement en termes d'ouverts et de fermés.

Proposition 1.3.22. *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et $f : X \to Y$ une application. Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est continue ;*
2. *$f^{-1}(O)$ est un ouvert de X pour tout ouvert O de Y ;*
3. *$f^{-1}(F)$ est un fermé de X pour tout fermé F de Y ;*

Démonstration. L'équivalence entre les point (2) et (3) découle de l'identité

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A).$$

Supposons f continue, et soit O un ouvert de Y. Il s'agit de montrer que $f^{-1}(O)$ est un ouvert de X. Soit $x \in f^{-1}(O)$. Comme $f(x) \in O$ qui est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(f(x), \varepsilon) \subset O$. Par continuité de f, il existe $\delta > 0$ tel que $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$. Donc $B(x, \delta) \subset f^{-1}(O)$, et $f^{-1}(O)$ est ouvert dans X.

Supposons maintenant que $f^{-1}(O)$ est un ouvert de X pour tout ouvert O de Y. Soit $x \in X$ et $\varepsilon > 0$. Puisque $B(f(x), \varepsilon)$ est un ouvert de Y, on a que $f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ est un ouvert de X qui contient x. Donc il existe $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$, c'est à dire $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$. La fonction f est donc continue. ☺

Remarque 1.3.23. Attention, il est faux qu'une application continue envoie un ouvert sur un ouvert, ou un fermé sur un fermé ! Par exemple, $x \to x^2$ envoie $\mathbb{R}$ (ouvert de $\mathbb{R}$) sur $\mathbb{R}^+$ qui est n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$. Ou encore, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

a pour image $\mathbb{R}^*$ qui n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$.

L'équivalence entre distances se reformule aussi en termes d'ouverts.

Proposition 1.3.24. *Soit X un ensemble et d_1 et d_2 deux distances sur X. Alors d_1 et d_2 sont équivalentes si et seulement si les topologies induites par d_1 et d_2 coïncident.*

Démonstration. D'après la Proposition 1.2.27, les distances d_1 et d_2 sont équivalentes si et seulement si $Id : X \to X$ est un homéomorphisme. Le résultat découle maintenant de la Proposition 1.3.22. ☺

1.3.2 Digression : espaces topologiques

Nous avons introduit à la Section 1.3.1 la notion d'ouvert et de fermé d'un espace métrique, et reformulé les notions de convergence et de continuité uniquement en ces termes. Cela fait émerger des objets plus généraux que les espaces métriques, où les ouverts et les fermés restent mais la métrique a disparue. Étant donné X un ensemble, on note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des sous-ensemble de X.

Définition 1.3.25. *Un* espace topologique *est la donnée d'un ensemble X et de $\mathcal{O}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *$\emptyset$ et X sont des éléments de $\mathcal{O}(X)$;*
2. *une union quelconque d'éléments de $\mathcal{O}(X)$ est encore dans $\mathcal{O}(X)$;*
3. *une intersection finie d'éléments de $\mathcal{O}(X)$ est encore dans $\mathcal{O}(X)$;*

Les éléments de $\mathcal{O}(X)$ s'appellent les ouverts *de X. Le complémentaire d'un ouvert s'appelle un* fermé *de X.*

Exemple 1.3.26. Pour tout ensemble X, l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ tout entier est une topologie sur X, appelée la *topologie discrète.* À l'opposé, la plus petite topologie possible est $\{\emptyset, X\}$, appelée *topologie grossière.*

D'après la section 1.3.1, un espace métrique définit bien un espace topologique. La réciproque n'est cependant pas vraie.

Proposition 1.3.27. *Soit (X, d) un espace métrique contenant au moins deux points. Alors la topologie grossière sur X n'est induite par aucune distance sur X.*

Démonstration. Si X contient deux points distincts x et y, il n'existe pas d'ouverts disjoints O_1 et O_2 de X pour la topologie grossière tels que $x \in O_1$ et $y \in O_2$. La topologie grossière sur X ne vérifie donc pas la Proposition 1.2.9, et n'est donc pas induite par une distance sur X. ☺

Grâce à la Proposition 1.3.22, on peut généraliser la notion de fonction continue aux espaces topologiques.

Définition 1.3.28. *Soit $(X, \mathcal{O}(X))$ et $(Y, \mathcal{O}(Y))$ deux espaces topologiques, et $f : X \to Y$ une application. On dit que f est continue sur X si $f^{-1}(O)$ est un ouvert O de X pour tout ouvert de Y.*

De manière équivalente, une fonction $f : X \to Y$ est continue sur X si $f^{-1}(F)$ est un fermé de X pour tout fermé F de Y.

Nous n'avons malheureusement pas le temps d'étudier plus en détails les espaces topologiques. Il s'agit cependant d'une notion fondamentale traversant toutes les mathématiques (au même titre que les espaces vectoriels). Une des raisons principales est que l'on a souvent besoin de parler de continuité de fonctions sans avoir de distance à priori, même dans des situations très simples (en particulier dans les quotients d'espaces métriques). Vous rencontrerez sans aucun doute les espaces topologiques de nouveau si vous poursuivez vos études en mathématiques.

1.3.3 Adhérence, intérieur

Définition 1.3.29. *Soit (X, d) un espace métrique, et $A \subset X$.*

1. *L'*intérieur *de A, noté $\overset{\circ}{A}$, est l'union de tous les ouverts de X contenus dans A.*
2. *L'*adhérence*, ou* fermeture*, ou encore* clôture *de A, noté $\overline{A}$, est l'intersection de tous les fermés de X contenant A.*

On dit que A est dense *dans X si $\overline{A} = X$.*

La proposition suivante suit immédiatement de la Définition 1.3.29 et de la Proposition 1.3.8.

Proposition 1.3.30. *Soit (X, d) un espace métrique, et $A \subset X$. L'intérieur de A est le plus grand ouvert de X contenu dans A. L'adhérence de A est le plus petit fermé de X contenant A.*

Exemple 1.3.31. L'intérieur d'un ouvert est lui même. L'adhérence d'un fermé est lui même.

Exemple 1.3.32. Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, l'intérieur de $[-1; 1[$ est $]-1; 1[$, et son adhérence est $[-1; 1]$.

Exemple 1.3.33. Puisque $B(x,r) \subset \overline{B}(x,r)$ et que $\overline{B}(x,r)$ est un fermé de X, on en déduit $\overline{B(x,r)} \subset \overline{B}(x,r)$. L'exemple 1.2.8 montre cependant, avec un peu de réflexion, que cette inclusion peut-être stricte ! L'Exercice 1.3.2 monter que dans le cas d'un espace vectoriel normé, cette inclusion est toujours une égalité.

Les deux caractérisations suivantes de l'adhérence d'un ensemble seront très utiles en pratique.

Proposition 1.3.34. *Soit (X,d) un espace métrique, et $A \subset X$. Alors $\overline{A}$ est l'ensemble des limites de suites de A convergeant dans X.*

Démonstration. On note B l'ensemble des limites de suites de A convergeant dans X. D'après la propriété 1.3.21, on a $B \subset \overline{A}$ puisque $\overline{A}$ est fermé. Pour montrer l'inclusion inverse, on va montrer que B est fermé, ce qui conclura d'après la Proposition 1.3.30.

Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de B, convergeant vers $y \in X$. Il faut montrer que y est dans B. Par définition de B, le point y_n est limite d'une suite de A, en particulier il existe $x_n \in A$ tel que

$$d(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n}.$$

On a

$$d(y, x_n) \leq d(y, y_n) + d(y_n, x_n) \leq d(y, y_n) + \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

Donc y est la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est une suite d'éléments de A, et donc $y \in B$ par définition de B. ☺

Proposition 1.3.35. *Soit (X,d) un espace métrique, et $A \subset X$. Alors $\overline{A}$ est l'ensemble des points $x \in X$ tels que*

$$\forall \varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

Démonstration. Soit B l'ensemble des $x \in X$ tels que

$$\forall \varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

Soit $x \in B$. Par définition, pour tout entier $n > 0$, il existe $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de A qui converge vers x, donc $x \in \overline{A}$ d'après la Proposition 1.3.34.

Réciproquement, si $x \in \overline{A}$, par la Proposition 1.3.34 il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A qui tend vers x. En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, le point $x_n \in B(x,\varepsilon)$ pour n assez grand, et $x \in B$. ☺

1.3.4 Exercices

Exercice 1.3.1. Soit deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y) .

1. Montrer que $(X \times Y, d)$ est un espace métrique pour les distances suivantes :
   (a) $d((a,b),(x,y)) = \max\{d_X(a,x),\ d_Y(b,y)\}$
   (b) $d((a,b),(x,y)) = d_X(a,x) + d_Y(b,y)$
   (c) $d((a,b),(x,y)) = \sqrt{d_X^2(a,x) + d_Y^2(b,y)}$
2. Montrer que ces trois distances sur $X \times Y$ sont équivalentes.

La topologie de $X \times Y$ est celle définie par n'importe laquelle des métriques ci-dessus.

Exercice 1.3.2. `Adhérence d'une boule ouverte.`

1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que pour tout $x \in E$ et tout $r > 0$, on a
$$\overline{B(x,r)} = \overline{B}(x,r).$$
2. Montrer que ce n'est pas nécessairement vrai dans un espace métrique.

Exercice 1.3.3. Soit (X, d) un espace métrique, et $Y \subset X$ muni de la distance induite par d. Montrer que tout ouvert de Y est l'intersection de Y avec un ouvert de X.

Exercice 1.3.4. Soit (X, d) un espace métrique et $A,\ B$ deux sous-ensembles de X.

1. Comparer $\overline{A \cup B}$ à $\overline{A} \cup \overline{B}$.
2. Comparer $\overline{A \cap B}$ à $\overline{A} \cap \overline{B}$.
3. Comparer $\overbrace{A \cup B}^{\circ}$ à $\mathring{A} \cup \mathring{B}$.
4. Comparer $\overbrace{A \cap B}^{\circ}$ à $\mathring{A} \cap \mathring{B}$.

Exercice 1.3.5. `Fonction distance.`
Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. On définit la distance à A d'un point x de X par
$$d_A(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

1. Montrer que la fonction $d_A : X \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne.
2. Montrer que si A est fermé, alors
$$x \in A \Longleftrightarrow d_A(x) = 0.$$
3. Montrer que tout fermé de X est le lieu d'annulation d'une fonction continue.

4. Étant donné deux fermés disjoints A et B de X, on considère la fonction définie sur X par
$$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}.$$
En remarquant que $f = 0$ sur A et $f = 1$ sur B, prouver qu'il existe deux ouverts U et V tels que
$$A \subset U, \quad B \subset V, \quad \text{et} \quad U \cap V = \emptyset.$$

Exercice 1.3.6. Soit $X = l^\infty$ l'espace des suites réelles bornées, et Y l'espace des suites réelles tendant vers 0, tous deux munis de la norme
$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$
avec $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que Y est fermé dans X.
2. Montrer que l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang est dense dans Y mais pas dans X.

Exercice 1.3.7. Soit D l'ensemble des nombres réels qui s'écrivent $a + b\sqrt{2}$ avec a et b dans $\mathbb{Z}$.

1. Montrer que D est stable par addition et par multiplication.
2. Soit $u = \sqrt{2} - 1$. Montrer que pour tous réels $a < b$, on peut trouver $n > 1$ tel que $0 < u^n < b - a$, puis $m \in \mathbb{Z}$ vérifiant $a < mu^n < b$.
3. Montrer que D est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1.3.8. Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et soit f et $g : X \to Y$ deux applications continues. Montrer que $\{x \in X \;;\; f(x) = g(x)\}$ est fermé dans X.

Soit D un ensemble dense dans X. Montrer que si $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in D$, alors $g = f$.

1.4 Compacité

La compacité est une notion clef en topologie. Son intérêt principal est de pouvoir passer de l'infini au fini, ou encore d'assurer l'existence de sous-suites convergentes d'une suite donnée. En d'autres termes, un espace compact est un espace qui, bien que potentiellement infini, peut être considéré comme raisonnablement petit et fermé.

1.4.1 Définition

Définition 1.4.1. *Soit (X, d) un espace métrique. On dit que X est* compact *si on peut extraire un sous-recouvrement fini de X de tout recouvrement de X par des ouverts, i.e. pour toute famille $(O_i)_{i\in I}$ d'ouverts de X telle que $X = \bigcup_{i\in I} O_i$, il existe $I_0 \subset I$ fini tel que $X = \bigcup_{i\in I_0} O_i$.*

La caractérisation des applications continues en terme d'ouverts et de fermés implique que le propriété d'être compact se transporte par homéomorphisme.

Lemme 1.4.2. *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques homéomorphes. Alors X est compact si et seulement si Y est compact.*

En passant au complémentaire, on a la formulation équivalente suivante de la compacité.

Lemme 1.4.3. *Soit (X, d) un espace métrique. Alors X est compact si et seulement si pour toute famille de fermés $(F_i)_{i\in I}$ telle que $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$, il existe $I_0 \subset I$ fini tel que $\bigcap_{i\in I_0} F_i = \emptyset$.*

Corollaire 1.4.4. *Soit (X, d) un espace métrique compact, et soit $(F_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de fermés non vides de X. Alors*

$$\bigcap_{n\geq 0} F_n \neq \emptyset.$$

Démonstration. Si cette intersection est vide, par compacité il existe N tel que

$$\bigcap_{n=0}^{N} F_n = \emptyset.$$

Mais comme $F_{n+1} \subset F_n$, on a

$$F_N = \bigcap_{n=0}^{N} F_n = \emptyset,$$

en contradiction avec l'hypothèse de non vacuité de F_N. ☺

Exemple 1.4.5. L'intervalle $]0; 1[$ n'est pas compact. En effet, on ne peut extraire un recouvrement fini du recouvrement ouvert

$$]0; 1[= \bigcup_{n>0}]\frac{1}{n}; 1 - \frac{1}{n}[.$$

Ou encore, on ne peut extraire une intersection finie vide de

$$\bigcap_{n>0}]0; \frac{1}{n}] = \emptyset.$$

La proposition suivante fournit un exemple fondamental d'espace compact.

Proposition 1.4.6. *Pour tous réels $a < b$, l'intervalle $[a;b]$ est compact.*

Démonstration. Soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$. On pose

$$W = \{t \in [a;b] \mid \text{il existe un sous-recouvrement fini de } [a;t] \text{par les } O_i\}.$$

On a clairement $a \in W$. De plus, si $t \in W$, alors on a $[a;t] \subset W$. Donc W est un intervalle de $\mathbb{R}$. Ainsi, en notant $c = \sup W$, on a alors $W = [a;c[$ ou $W = [a;c]$.

Il existe $i_0 \in I$ tel que $c \in O_{i_0}$. Comme O_{i_0} est un ouvert de $[a;b]$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]c-\varepsilon;c+\varepsilon[\cap[a;b] \subset O_{i_0}$. Par définition de c, le segment $[a;c-\varepsilon]$ admet un sous-recouvrement fini par les O_i. Mais alors en ajoutant O_{i_0} à ce sous-recouvrement, on obtient un sous-recouvrement fini de $[a;c+\varepsilon[\cap[a;b]$. Puisque $[a;c] \subset [a;c+\varepsilon[\cap[a;b]$, on en déduit donc $c \in W$ et $c = a$.

Ainsi, on a montré que $W = [a;b]$. On peut donc extraire un sous-recouvrement fini de tout recouvrement ouvert de $[a;b]$, i.e. le segment $[a;b]$ est compact. ☺

Le Théorème de Bolzano-Weierstrass suivant fournit une caractérisation séquentielle de la compacité.

Théorème 1.4.7 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Un espace métrique (X,d) est compact si et seulement si toute suite de X admet une sous-suite convergente.*

Démonstration. Supposons tout d'abord que X est compact. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X, et soit $A = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. Si A est fini, alors on peut extraire de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite constante, qui donc converge. Supposons maintenant que A est infini, et montrons que A a un point d'accumulation dans X, i.e. un point $x \in X$ pour lequel $B(x,\varepsilon) \cap A$ est infini pour tout $\varepsilon > 0$. Il en découlera immédiatement que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergeant vers x.

Dans le cas contraire, pour tout $y \in X$, il existe $\varepsilon_y > 0$ tel que $B(y,\varepsilon_y) \cap A$ soit fini. On a bien évidemment

$$X = \bigcup_{y\in X} B(y,\varepsilon_y).$$

Par compacité, il existe donc $y_1, \cdots, y_k$ tels que

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} B(y_i,\varepsilon_{y_i}),$$

et donc

$$A = \bigcup_{i=1}^{k} (B(y_i,\varepsilon_{y_i}) \cap A).$$

L'ensemble A est donc fini, ce qui est une contradiction.

Montrer la réciproque est un peu plus délicat, et demande plusieurs étapes. Supposons que toute suite de X admet une sous-suite convergente.

Étape 1 : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de X par des boules ouvertes de rayon ε.

En effet, supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que X n'admette aucun recouvrement fini par des boules ouvertes de rayon ε. On construit par récurrence une suite x_n de X de la manière suivante :
- $x_0 \in X$;
- $x_n \in X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} B(x_i, \varepsilon)\right)$.

Par construction, on a $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ pour tout entiers distincts i et j. La suite x_n n'admet donc aucune sous-suite convergente, ce qui contredit notre hypothèse de départ.

Étape 2 : Soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X. Alors

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall x \in X,\ \exists i \in I,\ B(x, \varepsilon) \subset O_i.$$

Raisonnons encore une fois par l'absurde, et supposons que

$$\forall n > 0,\ \exists x_n \in X,\ \forall i \in I,\ B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset O_i.$$

Quitte à extraire une sous-suite convergente de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut supposer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point $x \in X$. Comme X est recouvert par les O_i, il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in O_{i_0}$. Puisque O_{i_0} est un ouvert de X, il existe $\alpha > 0$ tel que $B(x, \alpha) \subset O_{i_0}$. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x, il existe $N \geq 0$ tel que $x_n \in B(x, \frac{\alpha}{2})$ si $n \geq N$. En particulier, pour tout $z \in B(x_n, \frac{\alpha}{2})$ avec $n \geq N$, on a

$$d(x, z) \leq d(x, x_n) + d(x_n, x) < \alpha$$

et donc $z \in B(x, \alpha) \subset O_{i_0}$. On a donc montré que $B(x_n, \frac{\alpha}{2}) \subset O_{i_0}$ pour $n \geq N$, et donc pour n assez grand on a $B(x_n, \frac{1}{n}) \subset O_{i_0}$ en contradiction avec nos hypothèses.

Étape 3 : Soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X. D'après l'étape 2,

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall x \in X,\ \exists i \in I,\ B(x, \varepsilon) \subset O_i.$$

Or, d'après l'étape 1, il existe $x_1, \cdots, x_k \in X$ tels que

$$X = \bigcup_{j=1}^{k} B(x_j, \varepsilon) \subset \bigcup_{j=1}^{k} O_{i_j} \subset X$$

avec i_j vérifiant $B(x_j, \varepsilon) \subset O_{i_j}$. On a donc bien extrait un sous-recouvrement fini du recouvrement ouvert $(O_i)_{i\in I}$. Ceci étant vrai pour tout recouvrement ouvert de X, on a donc montré que X est compact. ☺

1.4.2 Parties compactes d'un compact, produits d'espaces compacts

L'énoncé suivant est très utile en pratique.

Lemme 1.4.8. *Soit (X, d) un espace métrique, et soit $Y \subset X$. Alors Y est compact pour la distance induite par d si et seulement si il existe un sous-recouvrement fini de tout recouvrement de Y par des ouverts de X, i.e. pour toute famille $(O_i)_{i\in I}$ d'ouverts de X telle que $Y \subset \bigcup_{i\in I} O_i$, il existe $I_0 \subset I$ fini tel que $Y \subset \bigcup_{i\in I_0} O_i$.*

Démonstration. Si Y est compact et si $Y \subset \bigcup_{i\in I} O_i$ pour une famille (O_i) d'ouverts de X, alors $Y = \bigcup_{i\in I}(O_i \cap Y)$. Comme $O_i \cap Y$ est un ouvert de Y et que ce dernier est compact, il existe $O_{i_1}, \cdots, O_{i_k}$ tels que $Y = \bigcup_{j=1}^{k}(O_{i_j} \cap Y)$ et donc $Y \subset \bigcup_{j=1}^{k} O_{i_j}$.

Réciproquement, supposons que tout recouvrement de Y par des ouverts de X admette un sous-recouvrement fini. Soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement de Y par des ouverts de Y. Tout ouvert de Y est l'intersection d'un ouvert de X avec Y, et donc il existe $(O'_i)_{i\in I}$ famille d'ouverts de X tel que $O_i = O'_i \cap Y$. On a donc $Y \subset \bigcup_{i\in I} O'_i$, et par hypothèse on peut extraire un recouvrement fini de Y par les O'_i, et donc par les O_i. ☺

Définition 1.4.9. *Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'un sous-ensemble Y de X est* borné *si*

$$\exists M \in \mathbb{R}^+,\ \forall x, y \in Y,\ d(x, y) \leq M.$$

La proposition suivante relie propriétés intrinsèques (compacité) et relatives (être fermé ou borné).

Proposition 1.4.10. *Soit (X, d) un espace métrique, et soit $Y \subset X$. Si Y est compact pour la topologie induite, alors Y est borné et fermé dans X.*

Démonstration. Le fait que Y soit fermé dans X découle de la caractérisation séquentielle des espaces compacts. Soit $x \in X$ tel qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Y qui converge vers x. Par compacité de Y, il existe une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $y \in Y$. Mais toute sous-suite d'une suite convergente est convergente et de même limite, donc $x = y$ et $x \in Y$. Donc Y est bien un fermé de X.

Montrons maintenant que Y est borné. On a le recouvrement ouvert de Y par les boules $B(x, 1)$ lorsque x parcourt Y. Par compacité de Y, il existe $x_1, \cdots, x_k \in Y$ tels que

$$Y = \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, 1).$$

En prenant $M = \max_{i,j}(d(x_i, x_j)) + 2$, on a $d(x, y) \leq M$ pour tout $x, y \in Y$, et Y est bien borné. ☺

Exemple 1.4.11. On retrouve que $]-1;1[$ n'est pas compact. Plus généralement, une boule ouverte $B(x,r) \neq X$ d'un espace vectoriel normé n'est jamais compacte.

Notons que la réciproque de la Proposition 1.4.10 est fausse en général. Par exemple si X est un ensemble infini muni de la distance discrète, alors X est borné et fermé mais n'est pas compact. En effet, une suite de points deux à deux distincts ne peut contenir de sous-suite convergente (puisqu'une suite de X est convergente si et seulement si elle est constante à partir d'un certain rang). En revanche, il suffit que X soit compact pour que la réciproque soit vraie.

Proposition 1.4.12. *Soit (X,d) un espace métrique compact. Alors les sous-ensembles compacts de X sont exactement les fermés de X.*

Démonstration. Par la propriété précédente, on sait déjà qu'un compact de X est un fermé. Soit Y un fermé d'un espace compact X, et soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement de Y par des ouverts de X. Comme $Z = X \setminus Y$ est un ouvert de X, on obtient un recouvrement ouvert de X :

$$X = Z \cup \bigcup_{i\in I} O_i.$$

Comme X est compact, il en existe un sous-recouvrement fini, et donc il existe $O_{i_1}, \cdots, O_{i_k}$ tels que $X = Z \cup \bigcup_{j=1}^k O_{i_j}$ et donc $Y \subset \bigcup_{j=1}^k O_{i_j}$. ☺

On rappelle que la topologie d'un produit d'espaces métriques est définie à l'Exercice 1.3.1. En particulier, une suite $((x_n,y_n))_{n\geq 0}$ de $X\times Y$ tend vers (x,y) si et seulement si $x_n \to x$ et $y_n \to y$.

Proposition 1.4.13. *Un produit fini d'espaces métriques compacts est compact.*

Démonstration. Par récurrence, il suffit de montrer la proposition pour le produit de deux espaces compacts (X,d_X) et (X,d_Y). Soit $((x_n,y_n))_{n\geq 0}$ une suite de $X\times Y$. Comme X est compact, il existe une suite $(x_{\phi(n)})_{n\geq 0}$ extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $x\in X$. Comme Y est compact, il existe une suite $(y_{\psi(n)})_{n\geq 0}$ extraite de $(y_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $y\in Y$. Donc la suite $(x_{\psi\circ\phi(n)}, y_{\psi\circ\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers (x,y), et $X\times Y$ est bien compact. ☺

Remarque 1.4.14. Ce résultat reste vrai pour un produit quelconque d'espaces compacts, mais cela est un peu plus délicat à établir (en particulier il faut en premier lieu définir une topologie sur un produit infini).

Corollaire 1.4.15. *Les parties compactes de $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty)$ sont les parties bornées et fermées dans $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. On sait déjà qu'un compact est borné et fermé dans $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty)$. Soit Y un sous-ensemble borné et fermé de $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty)$. Rappelons que la boule de centre 0 et de rayon r de $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty)$ est le pavé $[-r;r]^n$. D'après les Propositions 1.4.6 et 1.4.13, cette boule est donc compacte. Puisque Y est borné, il existe un r tel que Y soit inclus dans $B(0,r)$. Mais Y est alors un fermé de $B(0,r)$ qui est compact, et est donc compact d'après la propriété 1.4.12. ☺

1.4.3 Compacts et fonctions continues

La compacité se transporte par application continue.

Proposition 1.4.16. *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et $f : X \to Y$ une fonction continue. Si X est compact, alors $f(X)$ aussi.*

Démonstration. Soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $f(X)$. Puisque f est continue, $f^{-1}(O_i)$ est un ouvert de X, et $(f^{-1}(O_i))_{i\in I}$ est un donc recouvrement ouvert de X. Par compacité de X, il existe $O_{i_1}, \cdots, O_{i_k}$ tels que $X = \bigcup_{j=1}^k f^{-1}(O_{i_j})$, et donc $f(X) = \bigcup_{j=1}^k O_{i_j}$. ☺

Exemple 1.4.17. Le cercle $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ est compact. En effet, c'est l'image de l'application continue

$$\begin{array}{rccccc} f: & [0;2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} & = & \mathbb{R}^2 \\ & x & \longmapsto & e^{ix} & = & (\cos x, \sin x) \end{array}.$$

La propriété précédente admet le corollaire fondamental suivant.

Corollaire 1.4.18. *Soit (X, d) un espace métrique compact, et soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes, i.e.*

$$\exists x_M, x_m \in X,\ \forall x \in X,\ f(x_m) \le f(x) \le f(x_M).$$

Démonstration. D'après la Proposition 1.4.16, $f(X)$ est un compact de $\mathbb{R}$ qui est donc un fermé borné. Étant borné, on a

$$-\infty < \inf f(X) \le \sup f(X) < +\infty.$$

De plus $f(X)$ étant fermé, on a $\inf f(X) \in f(X)$ et $\sup f(X) \in f(X)$. Donc il existe x_m et x_M dans X tels que $f(x_m) = \inf f(X)$ et $f(x_M) = \sup f(X)$. ☺

La compacité permet aussi d'assurer qu'une bijection continue est un homéomorphisme.

Proposition 1.4.19. *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et $f : X \to Y$ une bijection continue. Si X est compact, alors f est un homéomorphisme.*

Démonstration. Il s'agit de montre que f^{-1} est continue, c'est à dire que $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ est un fermé de Y pour tout fermé F de X. Par compacité de X on a que F est un compact de X. L'ensemble $f(F)$ est alors un compact de Y, et donc un fermé. ☺

1.4.4 Compacité dans les espaces vectoriels normés

Nous étudions ici les ensembles compacts d'un espace vectoriel normé. En particulier, ce qui précède permet de démontrer qu'en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Théorème 1.4.20. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Démonstration. Quitte à choisir une base de E, on peut supposer sans perte de généralité que $E = \mathbb{R}^n$. On note $e_1, \cdots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $||\cdot||$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. On va montrer plus précisément qu'il existe deux réels $m, M > 0$ tels que

$$m||\cdot||_\infty \leq ||\cdot|| \leq M||\cdot||_\infty,$$

ce qui entraîne immédiatement que les deux normes $||\cdot||$ et $||\cdot||_\infty$ sont équivalentes.

Pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} ||x|| &= ||\sum_{i=1}^n x_i e_i|| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot ||e_i|| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n ||e_i||\right) ||x||_\infty \end{aligned}$$

On peut donc prendre $M = \sum_{i=1}^n ||e_i||$.

Ce qui précède montre en particulier que l'application $||\cdot|| : (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty) \to \mathbb{R}$ est M-lipschitzienne, et donc continue. La sphère unité de $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty)$ étant compacte car fermée et bornée, la fonction $||\cdot||$ y est donc bornée et atteint ses bornes. Donc il existe un x_0 tel que $||x_0||_\infty = 1$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, ||x||_\infty = 1 \Rightarrow ||x|| \geq ||x_0||.$$

De plus, comme $x_0 \neq 0$, on a $||x_0|| \neq 0$. On a maintenant pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} ||x|| &= ||x||_\infty \cdot \left|\left|\frac{x}{||x||_\infty}\right|\right| \\ &\geq ||x||_\infty \cdot ||x_0|| \end{aligned}$$

On peut donc prendre $m = ||x_0||$. ☺

Corollaire 1.4.21. *Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors les parties compactes de E sont les fermés bornés.*

Démonstration. On peut supposer de nouveau que $E = \mathbb{R}^n$. Il suit du Théorème 1.4.20 que l'application $Id : (\mathbb{R}^n, ||\cdot||) \to (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty)$ est un homéomorphisme. Le corollaire découle maintenant du Corollaire 1.4.15. ☺

Le théorème suivant précise le corollaire précédent, et donne une caractérisation topologique (la compacité) d'une propriété algébrique (la finitude de la dimension). Sa démonstration est tout à fait accessible à un étudiant de L3, mais est hors-programme par manque de temps.

Théorème 1.4.22 (Riesz). *Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé. Alors E est de dimension finie si et seulement si la boule unité fermée de E est compacte.*

L'idée de la démonstration du théorème de Riesz est assez naturelle, et est illustrée dans l'exemple suivant.

Exemple 1.4.23. On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ munit de la norme

$$||\sum_{i=0}^{d} a_i X^i|| = \max(a_0, \ldots, a_d).$$

Alors la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de la sphère unité, qui n'admet aucune sous-suite convergente puisque

$$\forall n \neq m,\ ||X^n - X^m|| = 1.$$

1.4.5 Exercices

Exercice 1.4.1.

1. Montrer que $]0;1[$ est homéomorphe à $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $[0;1]$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}$.
3. $]0;1]$ est-il homéomorphe à $\mathbb{R}$?

Exercice 1.4.2. Soit (X, d) un espace métrique, et K_1 et K_2 deux compacts de X. Montrer que $K_1 \cup K_2$ et $K_1 \cap K_2$ sont deux compacts de X.

Exercice 1.4.3. Soit (X, d) un espace métrique compact. Montrer qu'une suite de X possédant une unique valeur d'adhérence l converge vers l.

Exercice 1.4.4. Soit (X, d) un espace métrique, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X convergeant vers $x \in X$. Montrer que $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est compact.

Exercice 1.4.5. `Compacts de` $\mathbb{R}^2$.

Parmi les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$, lesquelles sont compactes ?

$$
\begin{aligned}
&A = \left\{(x,y) \in R^2 \mid xy = 1, |x+y| \leq 3\right\} \\
&B = \left\{(x,y) \in R^2 \mid xy = 1, x+y \leq 3\right\} \\
&C = \left\{(x,y) \in R^2 \| \; y \geq e^x, x+y \leq 2, x \geq 0\right\} \\
&D = \left\{(x,y) \in R^2 \mid x^2+y^2 < 2\right\} \\
&D \cap \mathbb{Z}^2 \\
&E = \left\{(x,y) \in R^2 \mid y > e^x, x+y \leq 2, x \geq 0\right\} \\
&F = \left\{(\cos(t), \frac{\sin(t)}{5+\cos(2t)}), t \in \mathbb{R}\right\} \\
&\mathbb{Q} \cap [0;1]
\end{aligned}
$$

Exercice 1.4.6. On munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne :

$$\left\|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right\|_2 := \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2},$$

et on se propose d'étudier l'ensemble des matrices orthogonales :

$$O_2(\mathbb{R}) := \left\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) | A \cdot A^t = I_2)\right\}.$$

1. Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, calculer $Tr(A \cdot A^t)$
2. Montrer que $O_2(\mathbb{R})$ est bornée.
3. Est-ce que $O_2(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?
4. Est-ce que $O_2(\mathbb{R})$ est compact ?
5. Soit $SO_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1. Montrer que $SO_2(\mathbb{R})$ est un ouvert $O_2(\mathbb{R})$.

Exercice 1.4.7. `Distance entre deux compact.`

Soit (X,d) un espace métrique. Étant donné deux sous-ensembles A et B de X, on définit la distance entre A et B par

$$d(A,B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x,y).$$

1. Soit K_1 et K_2 deux compacts de X. Montrer qu'il existe $x \in K_1$ et $y \in K_2$ tels que $d(K_1,K_2) = d(x,y)$.
2. Soit K un compact de X et F un fermé de X vérifiant $F \cap K = \emptyset$. Montrer que $d(K,F) > 0$.

3. Montrer que cela est faux si on suppose simplement K fermé dans X.

Exercice 1.4.8. `Un compact universel.`

Soit X l'ensemble des suites à valeurs dans $[0;1]$ (i.e. $X = [0;1]^{\mathbb{N}}$) muni de la distance

$$d(x,y) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^{n+1}}.$$

1. Montrer que d est bien une distance sur X.
2. Montrer que (X,d) est compact.
3. Montrer que tout espace métrique compact est homéomorphe à un sous-ensemble de (X,d).

Exercice 1.4.9. `Théorème de Heine` Soit (X,d_X) et (Y,d_Y) deux espaces métriques, et $f : X \to Y$ une application continue. Montrer que si X est compact, alors f est uniformément continue.

Exercice 1.4.10. Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé.

1. Montrer qu'un sous-espace vectoriel de dimension finie de E est un fermé de E.
2. Trouver un exemple d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé qui n'est pas fermé.
3. Trouver un exemple d'un sous-espace vectoriel de dimension infinie fermé d'un espace vectoriel normé.

Exercice 1.4.11. Montrer que

$$H = \left\{(\cos(t), \frac{1}{1+t^2}), t \in \mathbb{R}\right\}$$

n'est pas fermé dans $\mathbb{R}^2$. Trouver son adhérence dans $\mathbb{R}^2$, et montrer que cette dernière est compacte.

Exercice 1.4.12. `Un théorème de point fixe.`

Soit (X,d) un espace métrique compact, et $f : X \to X$ une application continue.

1. Montrer que l'application $\phi : x \mapsto d(f(x),x)$ est continue et qu'elle atteint son minimum en un point $c \in X$.
2. Montrer que si f vérifie la condition

$$\forall x \neq y \in X, d(f(x),f(y)) < d(x,y),$$

alors c est un point fixe de f (i.e. $f(c) = c$).

3. Soit $x_0 \in K$ quelconque, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $f(x_{n+1}) = x_n$ si $n \geq 1$. Montrer que si a est un point d'accumulation de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $f(a)$ l'est aussi. Montrer que la suite $(d(c,x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et en déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers c.

1.5 Complétude

La notion de complétude précise la notion d'espace sans "trou". Par exemple, on peut formaliser le fait que $\mathbb{R}^*$ a un "trou" par le fait que la suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ est une suite de $\mathbb{R}^*$ qui converge, mais vers 0 qui n'est pas dans $\mathbb{R}^*$. De même, $\mathbb{Q}$ a des "trous" puisqu'il existe une suite de rationnels convergeant vers un irrationnel ($\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$). Comme suite concrète, on peut donner l'exemple du fameux nombre d'or qui s'écrit

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\ddots}}}}.$$

Ces deux exemples d'espaces à "trou" présuppose l'existence d'un espace plus gros, $\mathbb{R}$ dans les deux cas, dont on enlève une partie pour créer des trous.

Mais plus généralement, comment formaliser le fait qu'un espace a des "trous", sans faire appel à un espace plus gros dont on ne dispose pas toujours ? Par exemple, $\mathbb{R}$ est-il avec ou sans "trou" ? La notion de suite de Cauchy est la bonne notion permettant de formaliser ces "trou" : une suite de Cauchy est une suite qui "devrait" converger. Un espace à "trou" est alors un espace possédant une suite de Cauchy non convergente.

1.5.1 Suites de Cauchy

Définition 1.5.1. *Soit (X, d) un espace métrique. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X est appelée une suite de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \geq 0,\ \forall n, m \geq N,\ d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

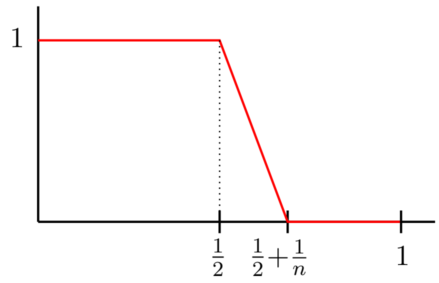
Ainsi, une suite est de Cauchy si deux termes de la suites sont aussi proches que l'on veut à partir d'un certain rang. D'après le Lemme 1.2.13, toute suite convergente est de Cauchy. La réciproque est fausse comme on l'a vu plus haut : la suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}^*$ mais ne converge pas dans $\mathbb{R}^*$. L'exemple suivant est plus subtil.

Exemple 1.5.2. On se place dans l'espace $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme

$$||f||_1 = \int_0^1 |f(t)|dt.$$

On considère la suite de fonction

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0; \frac{1}{2}] \\ 1 - n(t - \frac{1}{2}) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}; \frac{1}{2} + \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } t \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}; 1] \end{cases}$$



Graphe de la fonction f_n

La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$ puisque

$$||f_n - f_m||_1 = \frac{1}{2}|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|.$$

En revanche elle n'y converge pas, car la seule limite possible serait une fonction qui vaut 1 sur $[0; \frac{1}{2}[$ et 0 sur $]\frac{1}{2}; 1]$, qui ne peut être continue sur $[0; 1]$.

Proposition 1.5.3. *Soit (X, d) un espace métrique, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de X. Alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. De plus, si elle admet une valeur d'adhérence $x \in X$, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.*

Démonstration. Il existe $N \geq 0$ tel que $d(x_n, x_m) < 1$ pour tous $n, m \geq N$. En particulier

$$\forall n \geq N,\ d(x_N, x_n) < 1,$$

et la suite est bornée.

Supposons qu'il existe une suite $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x. Soit $\varepsilon > 0$. Alors

$$\exists N \geq 0,\ \forall n, m \geq N,\ d(x_{\phi(n)}, x) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or $\phi(n) \geq n$ pour tout n, donc pour tout $n \geq N$ on a

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{\phi(n)}) + (x_{\phi(n)}, x) < \varepsilon.$$

Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x comme annoncé. ☺

1.5.2 Espaces complets

Définition 1.5.4. *Un espace métrique (X, d) est* complet *si toute suite de Cauchy de (X, d) converge dans X.*

L'intérêt des espaces complets est qu'on peut garantir l'*existence* de la limite d'une suite sans nécessairement exhiber cette limite : il suffit de vérifier que la suite est de Cauchy.

Remarque 1.5.5. Contrairement aux notions de connexité et de compacité, la complétude dépend véritablement de la distance considérée et *n'est pas* invariante par homéomorphisme. En effet, d'après l'Exercice 1.5.1, l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la distance

$$d(x,y) = |e^{-x} - e^{-y}|$$

n'est pas complet. Il est pourtant homéomorphe à $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, qui lui est complet (voir Proposition 1.5.8 plus bas).

Exemple 1.5.6. Comme on a vu plus haut, $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{Q}$ ne sont pas complets.

Les espaces compacts et les espaces vectoriels normés de dimension finie fournissent les premiers exemples d'espaces complets.

Proposition 1.5.7. *Tout espace métrique compact (X, d) est complet.*

Démonstration. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de X, alors elle admet une valeur d'adhérence par compacité de X. Elle converge donc dans X d'après la Proposition 1.5.3. ☺

Proposition 1.5.8. *Un espace vectoriel normé $(E, ||\cdot||)$ de dimension finie est complet.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de E. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, est elle contenue dans une boule fermée $\overline{B}$ de E. Cette boule étant compacte, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\overline{B}$ d'après la Proposition 1.5.7. ☺

Exemple 1.5.9. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme quelconque est complet.

Définition 1.5.10. *Un espace vectoriel normé complet est appelé un* espace de Banach.

Exemple 1.5.11. Tout espace vectoriel normé de dimension finie est de Banach.

Exemple 1.5.12. D'après l'Exercice 1.5.3, l'espace l^∞ des suites réelles $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornées muni de la norme

$$||x||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

est un espace de Banach.

Exemple 1.5.13. D'après l'Exemple 1.5.2, l'espace $\mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$ muni de la norme

$$||f||_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$$

n'est pas un espace de Banach.

Remarque 1.5.14. Lorsque qu'un espace métrique (X, d) n'est pas complet, on peut construire un espace complet $(\hat{X}, \hat{d})$ contenant (X, d) comme sous-espace dense. L'idée est technique mais assez simple : $\hat{X}$ est défini comme l'ensemble des suites de Cauchy que l'on quotiente par une relation d'équivalence adéquate (qui est de tendre vers 0 dans le cas d'un espace vectoriel normé).

Ainsi, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est le complété de $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$. Une question se pose alors : existe-t-il d'autres normes ou distances pour lesquelles le complété de $\mathbb{Q}$ n'est pas $\mathbb{R}$? La réponse est oui, les nombres p-adiques constitue le complété de $\mathbb{Q}$ pour la norme p-adique. Ces espaces sont très importants en théorie des nombres.

Proposition 1.5.15. *Soit (X, d) un espace métrique complet, et $Y \subset X$. Alors Y est complet pour la métrique induite par d si et seulement si Y est fermé dans X.*

Démonstration. Supposons que Y soit fermé, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de Y. Puisque c'est aussi une suite de Cauchy de X, elle converge vers $x \in X$ puisque ce dernier est supposé complet. Mais Y étant fermé, on a $x \in Y$, et Y est complet.

Supposons maintenant que Y soit complet, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Y convergeant vers $x \in X$. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de X, et donc de Cauchy dans X. C'est donc aussi une suite de Cauchy de Y, qui converge donc dans Y. Donc $x \in Y$ et Y est fermé dans X. ☺

Proposition 1.5.16. *Soit (X_1, d_1) et (X_2, d_2) deux espaces métriques complets. Alors $(X_1 \times X_2, d)$ est aussi complet pour les trois distances*

1. $d((a, b), (x, y)) = \max\{d_X(a, x),\ d_Y(b, y)\}$;
2. $d((a, b), (x, y)) = d_X(a, x) + d_Y(b, y)$;
3. $d((a, b), (x, y)) = \sqrt{d_X^2(a, x) + d_Y^2(b, y)}$.

Démonstration. En effet, on vérifie aisément qu'une suite $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $X \times Y$ est de Cauchy si et seulement si les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy. ☺

1.5.3 Théorème de Banach

Comme indiqué plus haut, l'intérêt des espaces complets est de pouvoir garantir l'*existence* de certains objets. Nous avons déjà vu que la notion de suite de Cauchy d'un espace complet permet d'assurer l'existence de sa limite. Le Théorème de Banach nous permet d'assurer l'existence d'un point fixe d'une fonction contractante.

Définition 1.5.17. *Soit (X, d) un espace métrique. Une fonction $f : X \to X$ est dite* contractante *si il existe un nombre $k \in [0; 1[$ tel que*

$$\forall x, y \in X,\ d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y).$$

En particulier, une application contractante est lipschitzienne, et donc continue.

Remarque 1.5.18. Il ne suffit pas de montrer

$$\forall x, y \in X,\ d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

pour assurer qu'une fonction est contractante.

Définition 1.5.19. *Soit X un ensemble et $f : X \to X$ une fonction. Un* point fixe *de f est un point $x \in X$ tel que $f(x) = x$.*

Théorème 1.5.20 (Théorème du point fixe de Banach)**.** *Soit (X, d) un espace métrique complet, et $f : X \to X$ une fonction contractante. Alors f admet un unique point fixe dans X.*

De plus, si $x_0 \in X$, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie récursivement par $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers le point fixe de f.

Démonstration. Montrons tout d'abord que f admet au plus un point fixe. Si x et y sont deux points fixes de f, alors

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y)$$

ce qui ne peut être vrai que si $d(x, y) = 0$, i.e. $x = y$.

Montrons maintenant que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans X. Pour cela il suffit de montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Pour $n \geq m$, on a

$$d(x_n, x_m) \leq k^m \cdot d(x_{n-m}, x_0).$$

Or, par inégalité triangulaire on a

$$\begin{aligned} d(x_{n-m}, x_0) &\leq d(x_{n-m}, x_{n-m-1}) + d(x_{n-m-1}, x_{n-m-2}) + \cdots + d(x_1, x_0) \\ &\leq k^{n-m-1} \cdot d(x_1, x_0) + k^{n-m-2} \cdot d(x_1, x_0) + d(x_1, x_0) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-m-1} k^i \cdot d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{1}{1-k} \cdot d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

et donc

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{k^m}{1-k} \cdot d(x_1, x_0).$$

Or $\frac{k^m}{1-k} \to 0$ lorsque $m \to \infty$, donc étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $N \geq 0$ tel que $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$ pour $n, m \geq N$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy, et converge dans X puisque ce dernier est complet.

Notons x la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il reste à montrer que x est un point fixe de f. On a

$$f(x) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = x,$$

ce qui achève la preuve. ☺

Remarque 1.5.21. Le théorème précédent a une application remarquable dans l'étude des équations différentielles. Par exemple, considérons l'équation différentielle

$$y' = f(y), \qquad y(0) = x_0$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction deux fois dérivables (de classe C^1 suffit) et $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors le Théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une solution de l'équation définie sur un petit intervalle $]-\varepsilon; \varepsilon[$. Ce théorème se démontre par une application du Théorème de point fixe de Banach dans un espace de fonctions continues bien choisi.

1.5.4 Exercices

Exercice 1.5.1. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $d(x,y) = |e^{-x} - e^{-y}|$.

1. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que d et $|\cdot|$ sont topologiquement équivalentes.
3. Montrer que la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $(\mathbb{R}, d)$.
4. Montrer que $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet.

Exercice 1.5.2. Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé. Montrer que si les parties de E fermées et bornées sont complètes, alors E est complet.

Exercice 1.5.3. Soit l^∞ l'espace des suites réelles $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornées muni de la norme

$$||x||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

Montrer que $(l^\infty, ||\cdot||_\infty)$ est un espace de Banach.

Exercice 1.5.4. On se place dans l'espace $\mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme

$$||f||_\infty = \max_{t\in[0;1]} |f(t)|.$$

Montrer que $(\mathcal{C}([0;1], \mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$ est un espace de Banach.

Exercice 1.5.5. Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé. On dit qu'une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ de E est *normalement convergente* si la série $\sum_{n\geq 0} ||u_n||$ est convergente dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si E est complet, alors toute série normalement convergente est convergente.
2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E. Montrer qu'il existe une sous-suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad ||y_{n+1} - y_n|| \leq \frac{1}{2^n}.$$

3. En déduire que si toute série normalement convergente de E est convergente, alors E est de Banach.
   Indication : étant donné $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E, on peut écrire
   $$x_n - x_0 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}).$$

Exercice 1.5.6. Soit (X, d) un espace métrique complet, et $f : X \to X$ une fonction continue. On suppose qu'il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que f^l soit contractante. Montrer que f admet un unique point fixe dans X.

1.6 Connexités

La notion de connexité permet de formaliser la notion de "morceaux" ou de "composantes" d'un espace. Par exemple, on voudrait rendre compte que $[0; 1] \cup [3; 4]$ a deux "morceaux", qui sont $[0; 1]$ et $[3; 4]$.

On peut penser à au moins deux moyens pour vérifier qu'un espace X est en un seul morceaux. Le premier est de vérifier qu'on peut aller d'un point quelconque de X à un autre point quelconque sans avoir à "sauter" ; le deuxième est de vérifier que X est rangé soit entièrement à la cave, soit entièrement au grenier, mais pas dans les deux pièces (portes fermées) à la fois. La première notion s'appelle la connexité par arc, et part du postulat que $[0; 1]$ est en un seul morceaux ; la deuxième notion s'appelle la connexité (tout court), et part du postulat que $\{0, 1\}$ est constitué de deux morceaux. La connexité par arc est sans doute plus intuitive, et il n'est pas forcément très clair à première vue si ces deux notions sont différentes ou non. On verra qu'elle ne sont pas équivalentes, mais la différence entre les deux est assez subtile.

On souligne que les distances ne jouent absolument aucun rôle dans cette section, et que tous les énoncés et preuves de cette section s'étendent tels quels aux espaces topologiques (non nécessairement métriques).

1.6.1 Connexité par arc

Définition 1.6.1. *Soit (X, d) un espace métrique, et $x, y \in X$. Un chemin dans X reliant x à y est une application continue $\gamma : [0; 1] \to X$ vérifiant $\gamma(0) = x$ et $\gamma(0) = y$.*

On dit que (X, d) est connexe par arc *si pour tous points $x, y \in X$, il existe un chemin dans X reliant x à y.*

Exemple 1.6.2. $\mathbb{R}$ est connexe par arc. En effet, si $x, y \in \mathbb{R}$, on a le chemin $\gamma(t) = ty + (1 - t)x$ reliant x à y. Plus généralement, toute partie convexe d'un espace vectoriel normé est connexe par arc (la démonstration est identique).

Exemple 1.6.3. L'union $[0;1] \cup [3;4]$ n'est pas connexe par arc. En effet, il n'existe pas d'application continue $\gamma : [0;1] \to [0;1] \cup [3;4] \subset \mathbb{R}$ reliant 1 à 3, puisque d'après le Théorème des valeurs intermédiaires une telle application devrait avoir $[1;3]$ inclus dans son image.

Plus généralement, on a la caractérisation suivante des parties connexes par arc de $\mathbb{R}$.

Proposition 1.6.4. *Les sous-ensembles connexes par arc de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles.*

Démonstration. Un intervalle est convexe, et donc connexe par arc. Soit I un sous-ensemble connexe par arc de $\mathbb{R}$, et soit x et y dans I. Le Théorème des valeurs intermédiaires implique que $[x;y] \subset I$. I est donc convexe, et donc un intervalle. ☺

Exemple 1.6.5. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ n'est pas connexe par arc pour $n = 1$, et est connexe par arc pour $n \geq 2$.

La propriété d'être connexe par arc se transporte par application continue.

Proposition 1.6.6. *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et $f : X \to Y$ une application continue. Si X est connexe par arc, alors $f(X)$ aussi.*

Démonstration. Soit $x, y \in f(X)$, et soit $x', y' \in X$ tels que $f(x') = x$ et $f(y') = y$. Comme X est connexe par arc, il existe un chemin γ dans X reliant x' à y'. Par composition, on a que $f \circ \gamma : [0;1] \to f(X)$ est continue, et de plus

$$f \circ \gamma(0) = f(x') = x \quad \text{et} \quad f \circ \gamma(1) = f(y') = y.$$

Donc $f(X)$ est connexe par arc. ☺

Exemple 1.6.7. Le cercle S^1 de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^2$ est connexe par arc, puisque $S^1 = f(\mathbb{R})$ où

$$\begin{array}{cccccc} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} & = & \mathbb{R}^2 \\ & x & \longmapsto & e^{ix} & = & (\cos x, \sin x) \end{array}.$$

Une première application de la connexité par arc est le corollaire suivant de la Proposition 1.6.6.

Corollaire 1.6.8. *$\mathbb{R}$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ pour $n \geq 2$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un homéomorphisme $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ avec $n \geq 2$. Comme $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est connexe par arc, la Proposition 1.6.6 implique que $f(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = f(\mathbb{R}^n) \setminus \{f(0)\}$ est connexe par arc. Le Théorème des valeurs intermédiaires donne alors une contradiction. ☺

Malgré son côté intuitif et sa preuve “élémentaire”, cet énoncé mérite réflexion. Tout d'abord, puisque $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ ont même cardinal, il existe une bijection (non continue) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Même si on y ajoute la condition de continuité, il existe une application surjective continue, appelée courbe de Peano, de $[0;1]$ dans $[0;1]^2$! L'existence d'une telle application est plutôt contre intuitif, et illustre le fait qu'il faut se méfier du “bon sens” en topologie. La preuve du Corollaire 1.6.8 se généralise pour montrer que $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ ne sont pas homéomorphes si $n \neq m$. Cependant cette généralisation demande beaucoup de travail, et est à l'origine de la branche des mathématiques appelée *topologie algébrique*.

Si on regarde maintenant les isomorphismes linéaires $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, la situation est beaucoup plus simple.

Lemme 1.6.9. *Il existe un isomorphisme linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ si et seulement si $n = m$.*

Démonstration. Si $n = m$, on prend $f = Id$. Si un tel f existe, il conserve la dimension. ☺

1.6.2 Connexité

Définition 1.6.10. *Un espace métrique (X, d) est dit* connexe *si les seules parties à la fois ouvertes et fermées de X sont X et $\emptyset$.*

Avant de donner des exemples, reformulons cette définition. Cela fournira en particulier un lien avec ces histoires de cave et de grenier, ainsi qu'avec la notion de connexité par arc.

Proposition 1.6.11. *Soit (X, d) un espace métrique. Alors X est connexe si et seulement si pour tout ouverts U et V disjoints de X tels que $X = U \cup V$, on a $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$.*

Démonstration. Supposons X connexe, et soit U et V deux ouverts disjoints de X tels que $X = U \cup V$. Les parties $V = X \setminus U$ et $U = X \setminus V$ sont donc des fermés de X. Puisque X est connexe, U et V sont donc égales à X ou $\emptyset$. Comme $U \cap V = \emptyset$, on ne peut pas avoir $U = V = X$.

Supposons maintenant que pour tout ouverts U et V disjoints de X tels que $X = U \cup V$, on a $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$. Soit $A \subset X$ une partie à la fois ouverte et fermée. Donc A et $X \setminus A$ sont deux ouverts disjoints de X vérifiant $X = A \cup (X \setminus A)$. On a donc par hypothèse $A = X$ ou $A = \emptyset$, et X est connexe. ☺

Proposition 1.6.12. *Soit (X, d) un espace métrique. Alors X est connexe si et seulement toute application continue $f : X \to \{0, 1\}$ est constante.*

Démonstration. Supposons X connexe, et soit $f : X \to \{0,1\}$ une application continue. On a $X = f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1)$, et cette union est évidemment disjointe. Or, comme $\{0\}$ et $\{1\}$ sont tous les deux à la fois ouverts et fermés dans $\{0,1\}$ et que f est continue, les parties $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(1)$ sont aussi à la fois ouverts et fermés dans X. Donc l'un de ces deux ensemble est vide, et la fonction f est constante.

Supposons maintenant que $X = U \cup V$ avec U et V deux ouverts disjoints et non vides. Alors la fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & X & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \in U \\ 1 & \text{si } x \in V \end{cases} \end{array}$$

est non constante. De plus, f est continue puisque l'image réciproque de tout ouvert de $\{0,1\}$ par f est un ouvert de X. ☺

Corollaire 1.6.13. *Tout espace connexe par arc est connexe.*

Démonstration. Soit (X,d) un espace métrique connexe par arc, et soit $f : X \to \{0,1\}$ une application continue. Étant donné deux points $x, y \in X$, il existe un chemin $\gamma : [0;1] \to X$ reliant x à y. Alors $\gamma \circ f : [0;1] \to \{0,1\}$ est aussi continue, et donc constante par le Théorème des valeurs intermédiaires. Ainsi $f(x) = f(y)$, et ce pour tout $x, y \in X$. La fonction f est donc constante. ☺

La réciproque du Corollaire 1.6.13 est fausse, mais la différence entre les deux notions est assez subtile. Un exemple d'espace connexe mais non connexe par arc, en raison de phénomènes d'accumulation, est donné à l'exemple 1.6.16. En ce qui concerne les connexes de $\mathbb{R}$, il n'y a en revanche pas de différence.

Proposition 1.6.14. *Les sous-ensembles de connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.*

Démonstration. On sait déjà que les intervalles sont connexes par arc, et donc connexes. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble qui n'est pas un intervalle. Par définition d'un intervalle, il existe $x, z \in A$ et $y \in \mathbb{R} \setminus A$ tels que $x < y < z$. Les ensembles $A \cap]-\infty; y[$ et $A \cap]y; +\infty[$ sont deux ouverts disjoints non vides qui recouvrent A, donc A n'est pas connexe. ☺

La propriété suivante n'est pas vraie si on remplace *connexe* par *connexe par arc.*

Proposition 1.6.15. *Soit (X,d) un espace métrique, et $A \subset X$ un sous-ensemble connexe. Alors l'adhérence $\overline{A}$ de A dans X est connexe.*

Démonstration. Soit $f : \overline{A} \to \{0;1\}$ une fonction continue. En particulier $f|_A : A \to \{0;1\}$ est aussi une fonction continue et est donc constante, mettons égale à 1. Puisque $\{1\}$ est un fermé de $\{0;1\}$, l'ensemble $f^{-1}(1)$ est un fermé de $\overline{A}$, et donc de X car $\overline{A}$ est fermé, qui contient A. Or $\overline{A}$ est le plus petit fermé de X contenant A, et donc $f^{-1}(1) = \overline{A}$. ☺

Exemple 1.6.16. Soit $X \subset \mathbb{R}^2$ l'union de $Y_1 = \{(x, \sin\frac{1}{x}),\ x \in \mathbb{R}^*\}$ et du segment $Y_2 = \{0\} \times [-1;1]$. Il n'est pas très difficile de montrer que X est l'adhérence de Y_1 dans $\mathbb{R}^2$, et est donc connexe par la Proposition 1.6.15. En revanche X n'est pas connexe par arc, d'après l'Exercice 1.6.10.

Tout comme la connexité par arc, la connexité se transporte par application continue.

Proposition 1.6.17. *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et $f : X \to Y$ une application continue. Si X est connexe, alors $f(X)$ aussi.*

Démonstration. Soit $g : f(X) \to \{0,1\}$ une application continue. L'application $g \circ f : X \to \{0,1\}$ est une application continue, donc constante. Donc g est constante. ☺

1.6.3 Composantes connexes

Une composante connexe ou connexe par arc d'un espace métrique est un "morceaux" de ce dernier pour une des deux notions de connexité. Leur existence est assurée par le lemme suivant.

Lemme 1.6.18. *Soit (X, d) un espace métrique, et $A, B \subset X$ deux sous-ensembles connexes (respectivement connexe par arc). Si $A \cap B \neq \emptyset$, alors $A \cup B$ est encore connexe (respectivement connexe par arc).*

Démonstration. Supposons A et B connexes, et soit $f : A \cup B \to \{0;1\}$ une application continue. Par hypothèse f est constante sur A et sur B. Comme $A \cap B \neq \emptyset$, la valeur de f sur A et B coïncide, et f est constante.

Supposons maintenant A et B connexes par arc, et soit $x \in A$, $y \in B$ et $z \in A \cap B$. Par hypothèse, il existe deux applications continues $\gamma_1 : [0;1] \to A$ et $\gamma_2 : [0;1] \to B$ telles que

$$\gamma_1(0) = x, \qquad \gamma_1(1) = z, \qquad \gamma_2(0) = z \qquad \text{et} \qquad \gamma_2(1) = y.$$

Alors l'application

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & [0;1] & \longrightarrow & A \cup B \\ & t & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \gamma_1(2t) & \text{si } t \in [0;\frac{1}{2}] \\ \gamma_2(1-2t) & \text{si } t \in [\frac{1}{2};1] \end{array} \right. . \end{array}$$

est un chemin de x à y, et $A \cup B$ est bien connexe par arc. ☺

Proposition 1.6.19 (Composante connexe)**.** *Soit (X, d) un espace métrique et $x \in X$. Alors l'union de tous les sous-ensembles connexes (respectivement connexe par arc) de X contenant x est un sous-ensemble connexe (respectivement connexe par arc) de X. C'est le plus gros sous-ensemble connexe (respectivement connexe par arc) de X contenant X, appelé* composante connexe *de X (respectivement* composante connexe par arc*) contenant x.*

Démonstration. C'est bien un connexe ou connexe par arc d'après le Lemme 1.6.18, qui plus est le plus gros. ☺

Le lemme suivant implique qu'on peut abréger "composante connexe (par arc) contenant x" en "composante connexe (par arc)".

Lemme 1.6.20. *Soit (X, d) un espace métrique. Alors deux composantes connexes ou connexes par arc distinctes de X sont disjointes.*

Démonstration. Sinon l'union des deux serait un connexe ou connexe par arc les contenant strictement, contredisant ainsi la maximalité d'une composante connexe (par arc). ☺

Exemple 1.6.21. L'ensemble $[0; 1] \cup [3; 4] \subset \mathbb{R}$ a deux composantes connexes qui sont aussi connexes par arc : $[0; 1]$ et $[3; 4]$.

Le lemme suivant est faux pour les composantes connexes par arc.

Lemme 1.6.22. *Soit (X, d) un espace métrique. Alors toute composante connexe de X est fermée dans X.*

Démonstration. Soit Y une composante connexe X. Son adhérence $\overline{Y}$ est encore connexe d'après la Proposition 1.6.15, et contient Y. Par maximalité d'une composante connexe, on en déduit $Y = \overline{Y}$ i.e. Y un fermé de X. ☺

Une composante connexe de X n'est pas nécessairement ouverte dans X lorsque ce dernier possède un nombre infini de composantes connexes. La raison est de la même nature que celle distinguant la connexité et la connexité par arc : les phénomènes d'accumulation.

Exemple 1.6.23. Le singleton $\{0\}$ est une composante connexe de l'ensemble $\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$, mais n'en est pas un ouvert.

Exemple 1.6.24. Reprenons les ensembles $X = Y_1 \cup Y_2 \subset \mathbb{R}^2$ de l'Exemple 1.6.16. On sait déjà que X est connexe. Les composantes connexes par arc de X sont précisément Y_1 et Y_2. Le premier est ouvert mais pas fermé dans X, alors que le second y est fermé mais pas ouvert.

1.6.4 Exercices

Exercice 1.6.1. Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est connexe par arc pour $n \geq 2$.

Exercice 1.6.2. Montrer que l'union de deux droites distinctes de $\mathbb{R}^2$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}$.

Exercice 1.6.3. Parmi les sous ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$, déterminer lesquels sont connexes.

1. $B((1,0),1) \cup B((-1,0),1)$;
2. $\overline{B}((1,0),1) \cup B((-1,0),1)$;
3. $Gl_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$;
4. $\mathbb{Q}$.

Exercice 1.6.4. Soit (X,d) un espace métrique et $A \subset X$ une partie connexe. Montrer que si $A \subset B \subset \overline{A}$, alors B est connexe.

Exercice 1.6.5. Montrer que le complémentaire d'une droite dans $\mathbb{R}^2$ n'est pas connexe. Montrer que le complémentaire d'une droite dans $\mathbb{C}^2$ est connexe.

Exercice 1.6.6. Soit (X,d) et (Y,d) deux espaces métriques, et $f : X \to Y$ une fonction localement constante (i.e. pour tout $x \in X$, il existe un voisinage de x dans X sur lequel f est constante). Montrer que si X est connexe, alors f est constante.

Exercice 1.6.7. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ connexe est aussi connexe par arc.

Exercice 1.6.8. On a utilisé en cours le Théorème des valeurs intermédiaires pour décrire les connexes de $\mathbb{R}$. On se propose de faire l'inverse ici : déduire le Théorème des valeurs intermédiaires de la caractérisation des connexes de $\mathbb{R}$.

1. Soit $I \subset \mathbb{R}$, et supposons qu'il existe deux ouverts non vides disjoints U et V de I tels que $I = U \cup V$. Soit $x \in U$ et $z \in V$. Quitte à échanger U et V, on suppose que $x < z$. On pose $t = \sup\{y \in U \mid [x;y] \subset U\}$. Montrer que $x < t < z$ et que $t \notin I$.
2. Montrer qu'un connexe de $\mathbb{R}$ est un intervalle.
3. En déduire le Théorème des valeurs intermédiaires : l'image d'un intervalle par une application continue $f : I \to \mathbb{R}$ est un intervalle.

Exercice 1.6.9. Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Montrer que $X \times Y$ est connexe si et seulement si X et Y sont connexes.

Exercice 1.6.10. `Un connexe non connexe par arc`

Soit $X \subset \mathbb{R}^2$ l'union de $Y_1 = \{(x, \sin \frac{1}{x}),\ x \in \mathbb{R}^*\}$ et du segment $Y_2 = \{0\} \times [-1;1]$.

1. Montrer que X est l'adhérence de Y_1 dans $\mathbb{R}^2$.
2. En déduire que X est connexe.
3. Supposons qu'il existe une fonction continue $\gamma : [0;1] \to X$ telle que $\gamma(0) \in Y_1$ et $\gamma(1) \in Y_2$. On pose $t_0 = \sup\{t \in [0;1] \mid \gamma(t) \in Y_1\}$. Montrer que $\gamma(t_0) \in Y_2$, puis que γ n'est pas continue en t_0.
4. En déduire que X n'est pas connexe par arc.

1.7 Applications linéaires continues

Nous allons appliquer ici le contenu de ce qui précède au cas des applications linéaires. Ceci constituera en particulier une transition vers le calcul différentiel, seconde partie de ce module.

1.7.1 Applications linéaires continues entre espace vectoriels normés

Bien que très simple, les applications linéaires peuvent ne pas être continues. En effet, d'après l'Exemple 1.1.23 l'application

$$Id : (\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R}),\ ||\cdot||_1) \to (\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R}),\ ||\cdot||_\infty)$$

est linéaire mais pas continue. Le lemme suivant montre que les applications linéaires continues sont exactement les applications linéaires lipschitzienne.

Lemme 1.7.1. *Soit $(E, ||\cdot||_E)$ et $(F, ||\cdot||_F)$ deux espaces vectoriels normés, et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors f est continue en 0 si et seulement si*

$$\exists C \in \mathbb{R}^+,\ \forall x \in E,\ ||f(x)||_F \leq C||x||_E.$$

En particulier si f est continue en 0, alors elle est lipschitzienne, et donc continue, sur E tout entier.

Démonstration. L'existence de cette constante C implique bien évidemment que f est continue en 0. Réciproquement, si f est continue en 0, alors

$$\exists \delta > 0,\ ||x||_E \leq \delta \Leftarrow ||f(x)||_F \leq 1.$$

Alors pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, on a par linéarité

$$||f(x)||_F = \frac{||x||_E}{\delta}\left|\left|f\left(\frac{\delta}{||x||_E}\cdot x\right)\right|\right|_F \leq \frac{1}{\delta}||x||_E.$$

On peut donc prendre $C = \frac{1}{\delta}$. Maintenant pour tout $x, y \in E$, on a

$$||f(x) - f(y)||_F = ||f(x-y)||_F \leq \frac{1}{\delta}\cdot||x-y||_E,$$

et f est bien lipschitzienne sur E. ☺

Corollaire 1.7.2. *Soit $(E, ||\cdot||_E)$ et $(F, ||\cdot||_F)$ deux espaces vectoriels normés, et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors f est continue si et seulement si f est bornée sur la sphère unité, ou de manière équivalente sur la boule unité fermée.*

Étant donné $f(E, ||\cdot||_E) \to (F, ||\cdot||_F)$ une application linéaire continue entre deux espaces vectoriels normés, on note

$$|||f||| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{||f(x)||_F}{||x||_E}.$$

Par linéarité, on a bien évidemment

$$|||f||| = \sup_{||x||_E = 1} ||f(x)||_F.$$

Remarquons que bien qu'on ne retienne pas la dépendance de $|||f|||$ en les normes sur E et F dans la notation, cette dépendance est bien réelle.

Si l'espace de départ est de dimension finie, alors une application linéaire est automatiquement continue.

Corollaire 1.7.3. *Soit $(E, ||\cdot||_E)$ et $(F, ||\cdot||_F)$ deux espaces vectoriels normés, et $f : E \to F$ une application linéaire. Si E est de dimension finie, alors f est continue. En particulier, il existe $x_0 \in E$ tel que $||x||_E = 1$ et*

$$f(x_0) = |||f|||.$$

En d'autres termes, on a que $\sup_{||x||_E=1} ||f(x)||_F$ est en fait un max.

Démonstration. Puisque toutes les normes sur E sont équivalentes, on peut supposer que $(E, ||\cdot||_E) = (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty)$. En notant $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a pour $x = (x_1, \cdots, x_n)$

$$||f(x)||_F = ||\sum_{i=1}^n x_i f(e_i)||_F \leq \sum_{i=1}^n |x_i| ||f(e_i)||_F \leq C \cdot ||x||_\infty,$$

où $C = \sum_{i=1}^n ||f(e_i)||_F$. Comme E est de dimension finie, la sphère de rayon 1 est compacte. Comme f est continue, elle y est bornée et atteint ses bornes. ☺

Si E est de dimension infinie, il existe des applications linéaires $f : E \to F$ continues et des non continues.

Exemple 1.7.4. Si E est de dimension infinie, alors il existe une famille infinie $e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots$ de vecteurs linéairement indépendants tels que $||e_i||_E = 1$ pour tout i. En particulier, étant donné un vecteur $v \in F$, il existe une application linéaire $f : E \to F$ telle que $f(e_n) = n \cdot v$. Alors f est continue si et seulement si $v = 0$.

Exemple 1.7.5. Soit $(E, ||\cdot||_E)$ un espace vectoriel normé. Alors $Id : (E, ||\cdot||_E) \to (E, ||\cdot||_E)$ est continue quelle que soit la dimension de E.

1.7.2 Normes subordonnées

Définition 1.7.6. *Soit $(E, ||\cdot||_E)$ et $(F, ||\cdot||_F)$ deux espaces vectoriels normés. On définit $\mathcal{L}(E,F)$ comme l'ensemble des fonctions linéaires continues de $(E, ||\cdot||_E)$ dans $(F, ||\cdot||_F)$.*

L'espace $\mathcal{L}(E,F)$ est naturellement un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Nous allons voir maintenant que c'est aussi naturellement un espace vectoriel normé, de Banach si $(F, ||\cdot||_F)$ est de Banach.

Exemple 1.7.7. Si $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^m$, alors $\mathcal{L}(E,F)$ est isomorphe à $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, et donc à $\mathbb{R}^{mn}$. En particulier, c'est un espace de Banach pour tout choix de norme sur $\mathcal{L}(E,F)$.

Théorème 1.7.8. *Soit $(E, ||\cdot||_E)$ et $(F, ||\cdot||_F)$ deux espaces vectoriels normés. Alors $|||\cdot|||$ définit une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$, appelée norme subordonnées aux normes $||\cdot||_E$ et $||\cdot||_F$. De plus si $(F, ||\cdot||_F)$ est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E,F)$ est aussi un espace de Banach.*

Démonstration. Montrons d'abord que $|||\cdot|||$ est une norme. Si $|||f||| = 0$, alors $f(x) = 0$ pour tout $x \in E$ de norme 1, et donc $f(x) = 0$ pour tout $x \in E$ par linéarité.

On a

$$\begin{aligned} |||\lambda \cdot f||| &= \sup_{||x||_E=1} ||\lambda \cdot f(x)||_F \\ &= \sup_{||x||_E=1} (|\lambda| \cdot ||f(x)||_F) \\ &= |\lambda| \cdot \sup_{||x||_E=1} |||f(x)||_F \\ &= |\lambda| \cdot |||f||| \end{aligned}$$

Et enfin vérifions l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} |||f+g||| &= \sup_{||x||_E=1} ||f(x)+g(x)||_F \\ &\leq \sup_{||x||_E=1} (||f(x)||_F + ||g(x)||_F) \\ &= \sup_{||x||_E=1} |||f(x)||_F + \sup_{||x||_E=1} |||g(x)||_F \\ &= |||f||| + |||g||| \end{aligned}$$

On a donc montré que $|||\cdot|||$ est bien une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$.

Supposons maintenant que F est un espace de Banach, et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(\mathcal{L}(E,F), |||\cdot|||)$. Montrons tout d'abord que $(f_n(x))$ converge pour tout

$x \in E$, vers une limite notée $f(x)$. C'est évidemment vrai pour $x = 0$ et dans ce cas $f(0) = 0$. Soit $x \in E \setminus \{0\}$ et $\varepsilon > 0$. En appliquant la définition d'être de Cauchy avec $\frac{\varepsilon}{||x||_E}$, on obtient qu'il existe $N \geq 0$ tel que

$$\forall n, m \geq N,\ |||f_n - f_m||| \leq \frac{\varepsilon}{||x||_E}.$$

Puisque le vecteur $\frac{1}{||x||_E} \cdot x$ est de norme 1, on a alors par définition

$$\forall n, m \geq N,\ \left|\left|f_n\left(\frac{x}{||x||_E}\right) - f_m\left(\frac{x}{||x||_E}\right)\right|\right|_F \leq \frac{\varepsilon}{||x||_E},$$

et par linéarité

$$\forall n, m \geq N,\ ||f_n\,(x) - f_m\,(x)||_F \leq \varepsilon.$$

La suite $(f_n(x))$ est donc de Cauchy dans F qui est complet, et donc converge vers une limite notée $f(x)$.

On a donc construit une fonction $f : E \to F$. De plus f est linéaire puisque

$$f(\lambda x + \mu y) = \lim(f_n(\lambda x + \mu y)) = \lambda \lim f_n(x) + \mu \lim f_n(y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Montrons que f est continue en montrant qu'elle est bornée sur la sphère unité de E. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $N \geq 0$ tel que pour tous $n, m \geq N$ et tout $x \in E$ de norme 1, on a

$$||f_n(x) - f_m(x)||_F \leq \varepsilon.$$

En faisant tendre m vers $+\infty$, on obtient

$$\forall n \geq N,\ \forall x \in E,\ ||f_n(x) - f(x)||_F \leq \varepsilon.$$

Comme $||f(x)||_F - ||f_n(x)||_F \leq ||f_n(x) - f(x)||_F$, on obtient

$$||f(x)|| \leq \varepsilon + |||f_N|||.$$

La fonction f est donc bornée sur la sphère de rayon 1, et est donc continue.

Il reste donc à montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers f pour $|||\cdot|||$. Mais d'après ce qui précède on a

$$\forall n \geq N,\ |||f_n - f||| \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve précisément ce qu'on cherche. ☺

Exemple 1.7.9. Toute matrice $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ représente une application linéaire f_M donnée par

$$f_M : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ x & \longmapsto & Mx \end{array}.$$

Ainsi, le choix d'une norme $||\cdot||_{\mathbb{R}^m}$ et $||\cdot||_{\mathbb{R}^n}$ sur $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ induit la norme subordonnée sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ donnée par

$$|||M||| = \max_{||x||_{\mathbb{R}^n}=1} ||Mx||_{\mathbb{R}^m}.$$

Lorsque $E = F$, alors $\mathcal{L}(E, E)$, que l'on note plus simplement $\mathcal{L}(E)$, est une algèbre normée.

Définition 1.7.10. *Soit* $(E, ||\cdot||)$ *un espace de Banach. On dit qu'une application linéaire* $f \in \mathcal{L}(E)$ *est inversible si* f *est un isomorphisme et si* f^{-1} *est aussi continue. On note* $\mathcal{GL}(E)$ *l'ensemble des éléments inversibles de* $\mathcal{L}(E)$*.*

Nous terminons en mettant la définition précédente en perspective avec ce qui a été vu les années précédentes dans le cas où E est de dimension finie. Le choix de la norme $||\cdot||$ ne joue alors aucun rôle et tout endomorphisme de E est continu. De plus, on a les cinq caractérisations équivalentes suivantes pour un endomorphisme $f : E \to E$ d'être inversible :

1. f est bijective ;
2. f est injective ;
3. f est surjective ;
4. il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ telle que $g \circ f = Id$;
5. il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f \circ g = Id$.

Lorsque E est de dimension infinie, ces cinq propriétés ne sont plus équivalentes, même en ajoutant l'hypothèse de continuité.

Exemple 1.7.11. On se place dans l'espace de Banach $(l^\infty, ||\cdot||_\infty)$, et on considère les deux applications linaires

$$f : \begin{array}{ccc} l^\infty & \longrightarrow & l^\infty \\ (x_0, x_1, \cdots) & \longmapsto & (0, x_0, x_1, \cdots) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} l^\infty & \longrightarrow & l^\infty \\ (x_0, x_1, \cdots) & \longmapsto & (x_1, x_2, \cdots) \end{array}.$$

On voie facilement que f et g sont toutes les deux continues, que f est injective et g est surjective, et enfin que $g \circ f = Id$. Cependant f n'est pas surjective, g n'est pas injective, et $f \circ g \neq Id$ puisque

$$f \circ g(x_0, x_1, x_2, \cdots) = (0, x_1, x_2, \cdots).$$

Cependant, il reste vrai en dimension infinie que la condition pour f^{-1} d'être continue dans la Définition 1.7.10 n'est pas nécessaire, i.e. tout isomorphisme continue d'un espace de Banach a un inverse continu. C'est une conséquence du Théorème de Banach suivant, dont nous ne donnerons pas la démonstration ici.

Théorème 1.7.12 (Banach)**.** *Soit* $(E, ||\cdot||_E)$ *et* $(F, ||\cdot||_F)$ *deux espaces de Banach, et* $f \in \mathcal{L}(E, F)$*. Si* f *est bijective, alors* f^{-1} *est continue, i.e.* $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$*.*

1.7.3 Exercices

Exercice 1.7.1. Soit $(E, ||\cdot||_E)$, $(F, ||\cdot||_F)$ et $(G, ||\cdot||_G)$ trois espaces vectoriels normés, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer que

$$|||g \circ f||| \leq |||g||| \cdot |||f|||.$$

En déduire que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ (f,g) & \longmapsto & f \circ g \end{array}$$

est continue.

Exercice 1.7.2. On se place dans $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty)$, et on considère la norme subordonnée correspondante sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Quelle est la norme d'une matrice diagonale ?

Exercice 1.7.3. On considère l'application

$$\begin{array}{cccc} ||\cdot|| : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} & \longmapsto & \max_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |m_{i,j}| \end{array}.$$

1. Montrer que $||\cdot||$ est la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme $||\cdot||_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.
2. Quelle est la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme $||\cdot||_1$ sur $\mathbb{R}^n$?

Exercice 1.7.4. Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé, et $f : E \to \mathbb{R}$ une application linéaire.

1. Montrer que f est soit nulle, soit surjective.
2. On suppose que f est surjective, et on se fixe $u \in E$ tel que $f(u) = 1$. Montrer que si f n'est pas continue en 0, alors il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\operatorname{Ker} f$ convergeant vers u.
3. En déduire que f est continue si et seulement si $\operatorname{Ker} f$ est fermé dans E.

Exercice 1.7.5. Soit $(E, ||\cdot||_E)$ un espace de Banach, et soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière sur $\mathbb{K}$ de rayon de convergence $r > 0$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} a_n f^n$ converge dans $\mathcal{L}(E)$ si $f \in \mathcal{L}(E)$ satisfait $|||f||| < r$.

Exercice 1.7.6. $\mathcal{GL}(E)$ `est un ouvert de` $\mathcal{L}(E)$

Soit $(E, ||\cdot||_E)$ un espace de Banach.

1. Montrer que $B(Id, 1) \subset \mathcal{GL}(E)$.

   Indication : on rappelle que si $|t| < 1$, alors

   $$\frac{1}{1-t} = \sum_{n\geq 0} t^n.$$

2. En déduire que $\mathcal{GL}(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$.

Chapitre 2

Calcul Différentiel

Ce chapitre est consacré à la généralisation aux fonctions de plusieurs variables de la notion de dérivée d'une fonction d'une variable réelle. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite *dérivable* en $x_0 \in \mathbb{R}$ si le taux d'accroissement suivant

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

a une limite lorsque h tend vers 0. Dans ce cas, on note $f'(x_0)$ sa limite et on l'appelle la *dérivée* de f en x_0. Cette définition ne se généralise pas immédiatement à une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$, car dans ce cas x_0 et h sont des vecteurs, et diviser par le vecteur h n'est pas une opération licite... Il existe une deuxième définition équivalente de la dérivabilité de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: la fonction f est dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$ si et seulement si f admet un développement limité en x_0 à l'ordre 1, i.e.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\varepsilon(h)$$

avec $a \in \mathbb{R}$ et ε une fonction qui tend vers 0 lorsque h tend vers 0. Dans ce cas, on a de plus $a = f'(x_0)$. La signification de ce développement limité est la suivante : si f est dérivable en x_0, alors sur une voisinage de x_0 la fonction f peut être approchée par la fonction affine $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Cette définition en termes de développements limités ne nécessite plus de diviser par h, et se généralise bien à des fonctions de plusieurs variables (voire une infinité de variables !). Le terme $f'(x_0)h$ dans le cas d'une variable est alors remplacé par $d_{x_0}f(h)$, où $d_{x_0}f$ est maintenant une fonction linéaire, appelée *différentielle* de f en x_0.

Le but de ce qui suit est de définir et d'étudier cette notion de différentiabilité. On peut dors et déjà constater que la signification d'un développement limité à l'ordre 1 d'une fonction est *indépendante* du nombre de variables : il s'agit d'approcher, sur un voisinage de x_0, une fonction f différentiable en x_0 par la fonction affine

$$x \mapsto f(x_0) + d_{x_0}f(x - x_0).$$

Afin de simplifier les énoncés et les preuves, tous les espaces vectoriels considérés à partir de maintenant seront de dimension finie. En particulier, cela nous permettra en général de ne pas préciser les normes considérées sur ces espaces. Un calcul différentiel dans des espaces de Banach de dimension infinie peut-être développée de manière similaire, en gardant simplement en tête les normes considérées et les éventuelles fonctions linéaires non continues.

2.1 Fonctions différentiables

2.1.1 Différentielle

Avant de parler de différentielle, il est nécessaire de donner un sens au terme $h\varepsilon(h)$ pour n'importe quel nombre de variables.

Définition 2.1.1. *Soit* $(E, ||\cdot||_E)$ *et* $(F, ||\cdot||_F)$ *deux espaces vectoriels normés, et* U *un ouvert de* E. *Étant donné deux fonctions* $f : U \to F$ *et* $\phi : U \to \mathbb{R}$, *on dit que* f *est* négligeable *devant* ϕ *en* x_0 *si il existe une fonction* $\varepsilon : U \to \mathbb{R}$ *tendant vers* 0 *en* x_0 *et telle que*

$$||f(x)||_F \leq |\phi(x)| \cdot \varepsilon(x).$$

La propriété pour f d'être négligeable devant ϕ ne change pas si on change une des normes sur E ou F par une norme équivalente. En particulier, si E et F sont tous les deux de dimension finie, ces normes ne jouent aucun rôle. On dira alors que la fonction f est négligeable devant ϕ sans préciser les normes en question.

On utilise la notation $f = o_{x_0}(\phi)$, ou même $f = o(\phi)$ si $x_0 = 0$, lorsque f est négligeable devant ϕ en x_0. On dira également que f est un *petit o de ϕ en x_0* à la place de f négligeable devant ϕ en x_0.

Lemme 2.1.2. *Soit* E *et* F *deux espaces vectoriels de dimension finie, et* U *un ouvert de* E. *Si* $f : U \to F$ *et* $g : U \to F$ *sont deux fonctions négligeable devant* $\phi : U \to \mathbb{R}$ *en* $x_0 \in U$, *alors* $f + g$ *l'est aussi. En d'autres termes, on a*

$$f = o_{x_0}(\phi) \text{ et } g = o_{x_0}(\phi) \Longrightarrow f + g = o_{x_0}(\phi).$$

Démonstration. On a

$$||f(x)||_F \leq |\phi(x)| \cdot \varepsilon_1(x) \qquad \text{et} \qquad ||g(x)||_F \leq |\phi(x)| \cdot \varepsilon_2(x)$$

avec $\varepsilon_i(x)$ tendant vers 0 lorsque x tend vers 0. Par inégalité triangulaire, on a alors

$$||f(x) + g(x)||_F \leq |\phi(x)| \cdot (\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x))$$

et $\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)$ tend bien vers 0 lorsque x tend vers 0. ☺

Définition 2.1.3. *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert de E, et $f : U \to F$ une fonction. On dit que f est différentiable en $x \in U$ si il existe une application linéaire $d_x f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que*

$$f(x+h) = f(x) + d_x f(h) + o(||h||_E).$$

L'application linéaire $d_x f$ est appelée la différentielle en f en x. On dit que f est différentiable sur U si elle est différentiable en tout point de U.

Remarque 2.1.4. La propriété d'être différentiable, et la différentielle, ne change pas si on remplace $|| \cdot ||_E$ une norme équivalente.

Proposition 2.1.5 (Unicité de la différentielle)**.** *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert de E, et $f : U \to F$ une fonction. Si, pour $x \in U$, il existe deux applications linéaires $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que*

$$f(x+h) = f(x) + L_1(h) + o(||h||) \qquad \text{et} \qquad f(x+h) = f(x) + L_2(h) + o(||h||),$$

alors $L_1 = L_2$. En particulier, la différentielle en x de f, si elle existe, est uniquement définie.

Démonstration. Pour tout $h \in E \setminus \{0\}$, on obtient en soustrayant les deux égalités $(L_1 - L_2)(h) = o(||h||)$, et donc

$$(L_1 - L_2)(\frac{1}{||h||} h) = \frac{1}{||h||} o(||h||).$$

Puisque

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{||h||} o(||h||) = 0,$$

on en déduit que $L_1 = L_2$ sur la sphère unité de E. Par linéarité, on a $L_1 = L_2$ sur E tout entier. ☺

Lemme 2.1.6. *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert de E, et $f : U \to F$ une fonction. Si f est différentiable en $x \in U$, alors f est continue en x.*

Démonstration. Par définition, un petit o de $||h||$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0. Puisque $d_x f$ est continue, alors $d_x f(h)$ tend aussi vers 0 lorsque h tend vers 0. Et donc $f(x+h)$ tend vers $f(x)$ lorsque h tend vers 0, ou de manière équivalente $f(y)$ tend vers $f(x)$ lorsque y tend vers x. ☺

C'est conséquence immédiate des deux définitions par développement limité que dans le cas où $E = F = \mathbb{R}$, la notion de différentiabilité est équivalente à celle de dérivabilité.

Lemme 2.1.7. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors f est différentiable en $x \in U$ si et seulement si f est dérivable en x. De plus dans ce cas, on a*

$$d_x f(h) = f'(x) \cdot h.$$

En particulier, on a $f'(x) = d_x f(1)$.

Regardons maintenant quelques exemples.

Exemple 2.1.8. La fonction $f(x) = x^2$ est différentiable sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall x, h \in \mathbb{R}, \quad d_x f(h) = 2xh.$$

Exemple 2.1.9. Plus généralement, si U un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : U \to F$ est une fonction différentiable en $x \in U$, alors $d_x f$ est déterminée par sa valeur en 1 puisque par linéarité on a

$$d_x f(h) = h \cdot d_x f(1).$$

Exemple 2.1.10. Une fonction constante est différentiable, et sa différentielle en tout point est la fonction nulle. Nous verrons plus tard que la réciproque est vraie pour une fonction définie sur un ouvert connexe.

Exemple 2.1.11. Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour tout $x, h \in E$, on a

$$f(x+h) = f(x) + f(h).$$

En particulier, on voit que f est différentiable sur E, et que

$$\forall x \in E, \quad d_x f = f.$$

Exemple 2.1.12. La fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array}$$

est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et

$$d_{(x,y)} f(h,k) = xk + yh.$$

En effet, on a

$$f(x+h, y+k) = xy + xk + yh + hk.$$

Or, $(h,k) \mapsto xk + yk$ est linéaire, et on a

$$\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2, \quad |hk| \leq ||(h,k)||_\infty^2 = o(||(h,k)||_\infty),$$

d'où le résultat.

Exemple 2.1.13. La fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, xy) \end{array}$$

est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et

$$d_{(x,y)}f(h,k) = (h+k, xk+yh).$$

En effet, on a

$$f(x+h, y+k) = (x,y) + (h+k, xk+yh) + (0, hk).$$

Or, $(h,k) \mapsto (h+k, xk+yk)$ est linéaire, et on a

$$\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2, \quad ||(0,hk)||_\infty = |hk| = o(||(h,k)||_\infty),$$

d'où le résultat.

Exemple 2.1.14. La fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^2 \end{array}$$

est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$d_A f(H) = AH + HA.$$

En effet, on a

$$(A+H)^2 = A^2 + AH + HA + H^2.$$

L'application $A \mapsto AH + HA$ est bien linéaire, et pour une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnée à une norme sur $\mathbb{R}^n$, on a

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad |||H^2||| \leq |||H|||^2 = o(|||H|||),$$

d'où le résultat. On fera bien attention à ne pas écrire $d_A f(H) = 2AH$, car les matrices A et H ne commutent pas en général.

Comme dans le cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, les fonctions différentiables dont la différentielle est continue ont des propriétés très agréables. Il faut faire attention ici que la fonction $x \mapsto d_x f$ est à valeur dans $\mathcal{L}(E,F)$.

Définition 2.1.15. *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert de E, et $f : U \to F$ une fonction différentiable sur U. La fonction*

$$df: \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,F) \\ x & \longmapsto & d_x f \end{array}$$

est appelée la différentielle *de f. On dit que f est de classe C^1 sur U si df est continue sur U.*

Exemple 2.1.16. Tous les exemples ci-dessus de fonctions différentiables sont en fait des exemples de fonctions C^1. Par exemple, une application linéaire $f : E \to F$ est de classe C^1 puisque sa différentielle est constante

$$d_x f = f \quad \forall x \in E,$$

qui est donc une application continue.

2.1.2 Propriétés élémentaires de la différentielle

Proposition 2.1.17 (Linéarité de la différentielle)**.** *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert de E, et $f : U \to F$ et $g : U \to F$ deux fonctions. Si f et g sont toutes les deux différentiables en $x \in U$ (resp. de classe C^1 sur U), alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est différentiable en x (resp. de classe C^1 sur U) et*

$$d_x(\lambda f + \mu g) = \lambda d_x f + \mu d_x g.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g)(x+h) &= \lambda f(x+h) + \mu g(x+h)\\ &= \lambda f(x) + \lambda d_x f(h) + o(||h||) + \mu g(x) + \mu d_x g(h) + o(||h||)\\ &= (\lambda f + \mu g)(x) + (\lambda d_x f + \mu d_x g)(h) + o(||h||)\end{aligned}$$

d'où le résultat. ☺

Exemple 2.1.18. On retrouve ainsi que la fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+y, xy) \end{array}$$

est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et

$$d_{(x,y)} f(h,k) = (h+k, xk + yh).$$

En effet, on peut décomposer f en

$$f(x,y) = f_1(x,y) + f_2(x,y) + f_3(x,y),$$

avec

$$f_1(x,y) = (x,0), \quad f_2(x,y) = (y,0), \quad \text{et} \quad f_3(x,y) = (0,xy).$$

Les fonctions f_1 et f_2 sont linéaires, donc d'après l'exemple 2.1.11

$$d_{(x,y)} f_1(h,k) = (h,0), \quad \text{et} \quad d_{(x,y)} f_2(h,k) = (k,0).$$

L'exemple 2.1.12 nous donne

$$d_{(x,y)} f_2(h,k) = (0, xk + hy),$$

et la somme de ces trois différentielles donne bien la différentielle de f.

Le théorème suivant généralise le théorème de la dérivée d'une fonction composée.

Théorème 2.1.19 (Différentielle d'une fonction composée)**.** *Soit E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert de E, V un ouvert de F, et deux fonction $f : U \to F$ et $g : V \to G$ deux fonctions telles que $f(U) \subset V$. Si f est différentiable en $x \in U$ (resp. de classe C^1 sur U) et g est différentiable en $f(x) \in V$ (resp. de classe C^1 sur V), alors $g \circ f$ est différentiable en x (resp. de classe C^1 sur U) et*

$$d_x(g \circ f) = d_{f(x)}g \circ d_x f.$$

Ce théorème est parfois abrégé en la notation légèrement abusive, mais très parlante, suivante :

$$d(g \circ f) = dg \circ df$$

Démonstration. Il suffit simplement d'écrire les choses calmement. Puisque f est différentiable en x, il existe deux fonctions $\phi_1 : U_0 \to F$ et $\varepsilon_1 : U_0 \to \mathbb{R}$ avec U_0 un voisinage de 0 dans E, telles que

$$f(x+h) = f(x) + d_x f(h) + \phi_1(h)$$

et

$$||\phi_1(h)||_F \leq ||h||_E \cdot \varepsilon_1(h) \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0} \varepsilon_1(h) = 0.$$

Puisque g est différentiable en $f(x)$, il existe deux fonctions $\phi_2 : V_0 \to G$ et $\varepsilon_2 : V_0 \to \mathbb{R}$ avec V_0 un voisinage de 0 dans F, telles que

$$g(f(x)+k) = g \circ f(x) + d_{f(x)}g(k) + \phi_2(k)$$

et

$$||\phi_2(k)||_G \leq ||k||_F \cdot \varepsilon_2(k) \quad \text{et} \quad \lim_{k\to 0} \varepsilon_2(k) = 0.$$

En notant $k = d_x f(h) + \phi_1(h)$, on a donc

$$\begin{aligned} g \circ f(x+h) &= g(f(x)+k) \\ &= g \circ f(x) + d_{f(x)}g(k) + \phi_2(k) \\ &= g \circ f(x) + d_{f(x)}g(d_x f(h)) + d_{f(x)}g(\phi_1(h)) + \phi_2(d_x f(h) + \phi_1(h)) \end{aligned}$$

Il reste donc à vérifier que

$$d_{f(x)}g(\phi_1(h)) + \phi_2(d_x f(h) + \phi_1(h)) = o(||h||_E).$$

Tout d'abord, puisque $d_{f(x)}g$ est continue, on a

$$||d_{f(x)}g(\phi_1(h))||_G \leq |||d_{f(x)}g||| \cdot ||\phi_1(h)||_F \leq ||h||_E \cdot |||d_{f(x)}g||| \cdot \varepsilon_1(h) = o(||h||_E).$$

Ensuite, on a

$$||\phi_2(d_xf(h)+\phi_1(h))||_G \leq ||d_xf(h)+\phi_1(h)||_G \cdot \varepsilon_2(d_xf(h)+\phi_1(h)).$$

On note $\varepsilon_3(h) = \varepsilon_2(d_xf(h)+\phi_1(h))$. Comme d_xf est linéaire continue, on a $\lim_{h\to 0} d_xf(h) = 0$. De plus $\lim_{h\to 0} \phi_2(h) = 0$, donc $\lim_{h\to 0}(d_xf(h)+\phi_1(h)) = 0$ et donc

$$\lim_{h\to 0} \varepsilon_3(h) = 0.$$

Pour terminer, on a

$$\begin{aligned} ||d_xf(h)+\phi_1(h)||_G &\leq ||d_xf(h)||_G + ||\phi_1(h)||_G \\ &\leq |||d_xf||| \cdot ||h||_E + ||h||_E \cdot \varepsilon_1(h) \\ &\leq ||h||_E \cdot \left(|||d_xf||| + \varepsilon_1(h)\right). \end{aligned}$$

En résumant, on a donc

$$||\phi_2(d_xf(h)+\phi_1(h))||_G \leq ||h||_E \cdot (|||d_xf||| + \varepsilon_1(h)) \cdot \varepsilon_3(h).$$

Comme $(|||d_xf||| + \varepsilon_1(h)) \cdot \varepsilon_3(h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0, on a bien que $\phi_2(d_xf(h)+\phi_1(h))$ est un petit o de $||h||_E$, et le théorème est démontré. ☺

Exemple 2.1.20. Vérifions que le Théorème 2.1.2 redonne bien la règle de dérivation d'une fonction composée dans le cas où $E = F = G = \mathbb{R}$, c'est à dire la formule

$$(g\circ f)'(x) = f'(x)\cdot g'(f(x)).$$

On a

$$\begin{aligned} (g\circ f)'(x) &= d_x(g\circ f)(1) \\ &= d_{f(x)}g(d_xf(1)) \\ &= d_{f(x)}g(f'(x)) \\ &= f'(x)\cdot d_{f(x)}g(1) \\ &= f'(x)\cdot g'(f(x)) \end{aligned}$$

comme annoncé (l'avant dernière ligne est obtenue par linéarité de $d_{f(x)}g$).

Exemple 2.1.21. On rappelle que les différentielles des fonction $p(t) = t^n$ et $exp(t) = e^t$ sur $\mathbb{R}$ sont données par

$$d_tp(h) = n\cdot t^{n-1}\cdot h \quad \text{et} \quad d_texp(h) = exp(t)\cdot h.$$

Soit maintenant E un espace vectoriel de dimension finie, U un ouvert de E, et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en $x \in U$. Alors les fonction $f^n(x) = (f(x))^n$ et e^f sont aussi différentiables en X. De plus ces différentielles sont données par

$$\begin{aligned} d_x(f^n)(h) &= d_{f(x)}p \circ d_x f(h) \\ &= n \cdot f^{n-1}(x) \cdot d_x f(h) \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} d_x(e^f)(h) &= d_{f(x)}exp \circ d_x f(h) \\ &= e^f \cdot d_x(f)(h) \end{aligned}$$

De même, si $f(x) \neq 0$, alors la fonction $\frac{1}{f}$ est différentiable en x et

$$d_x\left(\frac{1}{f}\right)(h) = -\frac{1}{f^2(x)} \cdot d_x f(h).$$

Proposition 2.1.22 (Fonction à valeurs dans un produit)**.** *Soit E, F_1 et F_2 trois espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert de E, et*

$$\begin{array}{rccc} f: & U & \longrightarrow & F_1 \times F_2 \\ & x & \longmapsto & (f_1(x), f_2(x)) \end{array}$$

une fonction. Alors f est différentiable en $x \in U$ (resp. de classe C^1 sur U) si et seulement si f_1 et f_2 sont différentiable en $x \in U$ (resp. de classe C^1 sur U). De plus dans ce cas, on a

$$\forall h \in E, \quad d_x f(h) = (d_x f_1(h), d_x f_2(h)).$$

Démonstration. On considère les projections naturelles

$$\begin{array}{rccc} \pi_1: & F_1 \times F_2 & \longrightarrow & F_i \\ & (x_1, x_2) & \longmapsto & x_i \end{array}.$$

Ces projections sont linéaires, donc différentiables. Comme $f_i = \pi \circ f$, on a donc que f_1 et f_2 sont différentiables si f l'est.

On suppose maintenant f_1 et f_2 différentiables. On a alors

$$\begin{aligned} f(x+h) &= (f_1(x+h), f_2(x+h)) \\ &= (f_1(x) + d_x f_1(h) + \phi_1(h), f_2(x) + d_x f_2(h) + \phi_2(h)) \\ &= (f_1(x), f_2(x)) + (d_x f_1(h), d_x f_2(h)) + (\phi_1(h), \phi_2(h)) \end{aligned}$$

où

$$||\phi_i(h)||_{F_i} \leq ||h||_E \cdot \varepsilon_i(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} \phi(h) = 0.$$

On munit le produit $F_1 \times F_2$ de la norme

$$||(x, y)||_{F_1 \times F_2} = ||x||_{F_1} + ||y||_{F_2}.$$

La fonction $h \mapsto (d_x f_1(h), d_x f_2(h))$ est linéaire et

$$||(\phi_1(h), \phi_2(h))||_{F_1 \times F_2} \leq ||h||_E \cdot (\varepsilon_1(h) + \varepsilon_2(h)) = o(||h||),$$

ce qui est exactement ce qu'on veut démontrer. ☺

Exemple 2.1.23. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, U un ouvert de E, et $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables en $x \in U$ (resp. de classe C^1 sur U). Alors le produit fg est aussi différentiable en x (resp. de classe C^1 sur U) et

$$d_x(fg)(h) = f(x) \cdot d_x g(h) + g(x) \cdot d_x f(h).$$

En effet, la fonction fg est la composition des fonctions

$$\begin{array}{rccc} \psi : & E & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & x & \longmapsto & (f(x), g(x)) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \kappa : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & xy \end{array},$$

et on applique la règle de différentiation d'une composée de fonctions.

2.1.3 Exercices

Exercice 2.1.1. Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, et $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer que si $f = o(||h||_E)$, alors f est la fonction nulle.

Exercice 2.1.2. Montrer qu'une fonction polynomiale $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe C^1.

Exercice 2.1.3. Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, et $f : E \times E \to F$ une application bilinéaire continue. Montrer que f est différentiable sur $E \times E$, et calculer sa différentielle.

Exercice 2.1.4. On se place dans $\mathbb{R}^n$ munit du produit scalaire euclidien $\langle\ ,\ \rangle$, et on note $|| \cdot ||_2$ la norme euclidienne. Calculer la différentielle des fonctions $x \mapsto ||x||_2^2$ et $x \mapsto ||x||_2$.

Exercice 2.1.5. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer la différentielle de la fonction

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & A & \longmapsto & A^k \end{array}.$$

Exercice 2.1.6. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $A : E \to \mathcal{L}(E)$ une application de classe C^1. On considère les applications

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathcal{L}(E) \times E & \longrightarrow & E \\ & (u,x) & \longmapsto & u(x) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \psi : & E & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \times E \\ & x & \longmapsto & (A(x), x) \end{array}.$$

1. Montrer que ϕ est une application bilinéaire de classe C^1, et déterminer $d\phi$.
2. Montrer que ψ est une application de classe C^1 sur E, et calculer sa différentielle.
3. Montrer que la fonction
$$\begin{array}{rccc} B : & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & A(x)(x) \end{array}$$
est de classe C^1 sur E et calculer sa différentielle.

Exercice 2.1.7. Montrer que la fonction

$$\Phi : \begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^{-1} \end{array}.$$

est différentiable, et calculer sa différentielle.
Indication : Pour le calcul de $d\Phi$, on pourra différentier l'égalité

$$\Phi(A)A = I_n.$$

2.2 Dérivées partielles

Nous relions ici la notion de différentielle avec celle, plus familière, de dérivée partielle.

2.2.1 Dérivée le long une direction

Définition 2.2.1. *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert de E, et $f : U \to F$ une fonction. On dit que f admet une dérivée en $x \in U$ dans la direction $v \in E$ si la fonction $\psi : t \mapsto f(x + tv)$, définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, est dérivable en 0. Dans ce cas, on note*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \psi'(0)$$

cette dérivée. Dans le cas particulier où $E = \mathbb{R}^n$ et v est le ième vecteur e_i de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on utilise la notation

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \psi'(0)$$

et on l'appelle la ième dérivée partielle de f.

Exemple 2.2.2. Reprenons la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y, xy) \end{array}.$$

On calcule alors facilement

$$\frac{\partial f}{\partial (1,1)}(x, y) = (2, x + y), \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial (1,0)}(x, y) = (1, y),$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial (0,1)}(x, y) = (1, x).$$

La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ se calcule en fixant toutes les variables x_j pour $j \neq i$, et en faisant varier x_i.

Lemme 2.2.3. *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert de E, et $f : U \to F$ une fonction différentiable en $x \in U$. Alors f admet une dérivée en x dans toutes les directions, et on a*

$$\forall v \in E, \quad d_x f(v) = \frac{\partial f}{\partial v}(x).$$

Démonstration. C'est une application directe du Théorème 2.1.2 : la fonction $\psi : t \mapsto f(x + tv)$ est la composée de f avec la fonction $\kappa : t \mapsto x + tv$ qui est de classe C^1. De plus on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(x) &= \psi'(0)\\ &= d_{\kappa(0)} f \circ d_0\kappa(1)\\ &= d_x f(\kappa'(0))\\ &= d_x f(v)\end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme. ☺

Exemple 2.2.4. Continuons l'exemple 2.2.2. On a déjà calculé $d_{x,y}f(h, k) = (h+k, hy+xk)$, et on retrouve bien

$$\frac{\partial f}{\partial (1,1)}(x, y) = (2, x + y) = d_{x,y}f(1, 1), \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (1, y) = d_{x,y}f(1, 0),$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (1, x) = d_{x,y}f(0, 1).$$

Remarque 2.2.5. La réciproque du Lemme 2.2.3 n'est pas vraie : une fonction f peut avoir des dérivées partielles dans toutes les directions en x sans que l'application $v \mapsto \frac{\partial f}{\partial v}(x)$ soit linéaire. Une telle fonction n'est alors pas différentiable en x. Par exemple, la fonction

$$\begin{array}{cccc} f & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x^2(x-y)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}.$$

admet des dérivées partielles dans toutes les directions à l'origine, mais n'y est pas différentiable. En effet, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1, \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial (1,1)}(0,0) = 0$$

et donc

$$\frac{\partial f}{\partial (1,1)}(0,0) \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Corollaire 2.2.6. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une fonction. Si f est différentiable en $x \in U$, alors $d_x f$ est entièrement déterminée par ses dérivées partielles en x. Plus précisément, on a*

$$\forall (h_1, \cdots, h_n) \in \mathbb{R}^n, \quad d_x f(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} d_x f(h) &= d_x f\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \cdot e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot d_x f(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \end{aligned}$$

comme annoncé. ☺

Exemple 2.2.7. Pour la fonction f de l'Exemple 2.2.2, on a bien

$$d_{x,y} f(h,k) = (h+k, hy+xk) = h \cdot (1,y) + k \cdot (1,x) = h \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + k \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

Exemple 2.2.8. Dans où $m = 1$, i.e. $f : U \to \mathbb{R}$, les dérivées partielles sont alors des nombres réels, et on écrit aussi

$$\forall (h_1, \cdots, h_n) \in \mathbb{R}^n, \quad d_x f(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot h_i.$$

Le vecteur

$$\nabla_x f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$$

est appelé le *gradient* de f en x.

Comme on l'a vu, la réciproque du Lemme 2.2.3 n'est pas vraie. Le lien entre dérivées partielles et différentiabilité deviennent cependant plus simples pour les fonctions de classe C^1. Le théorème suivant sera démontré à la section 2.3 comme corollaire de l'Inégalité des accroissements finis.

Théorème 2.2.9. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une fonction. Alors f est de classe C^1 sur U si et seulement si toutes les dérivées partielles de f existent et sont continues sur U.*

Exemple 2.2.10. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction dont chacune des composantes

$$f_1(x_1, \ldots x_n), \cdots, f_m(x_1, \ldots x_n)$$

est un polynôme en les x_i. Alors f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$. Ainsi, la fonction déterminant det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est de classe C^1.

2.2.2 Matrice jacobienne

Une fois choisies une base de E et F, on peut décrire la différentielle par une matrice.

Définition 2.2.11. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et*

$$\begin{array}{cccc} f: & U & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & (f_1(x_1, \ldots x_n), \cdots, f_m(x_1, \ldots x_n)) \end{array}$$

une fonction différentiable en $x \in U$. On définit la matrice jacobienne *de f en x par*

$$Jac_x(f) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}).$$

Proposition 2.2.12. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable en $x \in U$. Alors $Jac_x(f)$ est la matrice de l'application linéaire $d_x f$.*

Démonstration. Il suffit de calculer en coordonnées le vecteur $d_x f(h)$. D'après la Proposition 2.1.22, la $j$ème coordonnée de $d_x f(h)$ est égale à $d_x f_j(h)$. D'après l'Exemple 2.2.10, on a donc alors

$$d_x f_j(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \cdot h_i,$$

c'est à dire

$$(d_x f)_{i,j} = (Jac_x(f))_{i,j},$$

et la proposition et démontrée. ☺

Exemple 2.2.13. Reprenons la fonction

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+y, xy) \end{array}.$$

On a alors

$$Jac_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad d_{x,y} f(h,k) = (h+k, hy+kx) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}.$$

La propriété précédente a plusieurs conséquences notables. Tout d'abord, on peut reformuler la différentielle d'une composée en terme de produit matriciel.

Corollaire 2.2.14. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, V un ouvert de $\mathbb{R}^m$, et deux fonction $f : U \to \mathbb{R}^n$ et $g : V \to \mathbb{R}^p$ deux fonctions telles que $f(U) \subset V$. Si f est différentiable en $x \in U$ et g est différentiable en $f(x) \in V$, alors*

$$Jac_x(g \circ f) = Jac_{f(x)}(g) \cdot Jac_x(f).$$

Un autre corollaire est une version un peu plus faible du Théorème 2.2.9, où l'on suppose dès le début que f est différentiable.

Corollaire 2.2.15. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une fonction différentiables. Alors f est de classe C^1 sur U si et seulement si toutes les dérivées partielles de f sont continues sur U.*

Démonstration. D'après la Proposition 2.2.12, $x \mapsto d_x f$ est continue si et seulement si $x \mapsto \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$ est continue pour tout couple (i, j). ☺

2.2.3 Exercices

Exercice 2.2.1. Soit

$$\begin{array}{cccc} f & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{cc} \frac{x^2(x-y)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{array} \right. . \end{array}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent, mais que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.
3. Montrer que la fonction $g(x,y) = xf(x,y)$ est différentiable en (0, 0).

Exercice 2.2.2. `Différentielle de fonctions composées.`
Considérons les applications $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définies par

$$\begin{aligned} &f(x,y) = (x^2 + y, 2xy, 3x^3 - x^2 y) \\ &g(x,y) = (x^2 - 3y, x - y^2) \\ &h(x,y,z) = (-xyz + y + z, x - xyz + z, x + y - xyz). \end{aligned}$$

1. Trouver les matrice jacobiennes de f, g, h.
2. Calculer de deux manières différentes la matrice jacobienne de $f \circ g$ au point $(1, -1)$. Que vaut la dérivée de $f \circ g$ au point $(1, -1)$ dans la direction $(1, 1)$?

3. Calculer de deux manières différentes la matrice jacobienne de $h \circ f$ au point $(1, -1)$.

Exercice 2.2.3. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{\ln(1+x^2+y^2)} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Calculer la jacobienne de f en tout point de $\mathbb{R}^2$. En déduire que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2.2.4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\ln(x^2+3y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

1. Montrer que f admet des dérivées partielles au point $(0,0)$.
2. Montrer que f est différentiable en $(0,0)$.

Exercice 2.2.5. Soit $f, u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ trois applications différentiables. Calculer les dérivées partielles de la fonction composée $g(x,y)$ définie par

$$g(x,y) := f(u(x,y), v(x,y)),$$

en fonction des dérivées partielles de f, u et v.

2.3 Accroissements finis

2.3.1 Inégalité des accroissements finis

L'inégalité bien connue des accroissements finis pour les fonctions d'une variable réelle stipule que les variations d'une fonction sont contraintes par sa dérivée. Autrement dit, pour aller loin en peu de temps, il est nécessaire d'aller vite. Nous généralisons cette inégalité aux fonctions de plusieurs variables dans ce qui suit. Soulignons que les énoncés de cette section font explicitement référence aux normes choisies sur les espaces vectoriels considérés. En particulier les applications numériques de ces énoncés sont sensibles à ces choix, malgré l'équivalence des normes en dimension finie.

Proposition 2.3.1. *Soit $a < b$ deux nombres réels, $(F, ||\cdot||_F)$ un espace de Banach de dimension finie, et $f : [a;b] \to F$ et $g : [a;b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a;b]$ et dérivables sur $]a;b[$. Alors*

$$\big(\forall x \in]a;b[, \quad |||d_x f||| \leq g'(t)\big) \Longrightarrow ||f(b) - f(a)||_F \leq g(b) - g(a).$$

Démonstration. Puisque $d_x f : \mathbb{R} \to F$ est une fonction linéaire d'une variable réelle, on a $|||d_x f||| = ||d_x f(1)||_F$. On va montrer que pour tout u, v tels que $a < u < v < b$, on a

$$||f(v) - f(u)||_F \leq g(v) - g(u)$$

et le résultat s'en suivra par continuité de f et g.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe de tels u_0 et v_0 tels que

$$||f(v_0) - f(u_0)||_F - (g(v_0) - g(u_0)) = M > 0.$$

On pose $m = \frac{v_0 - u_0}{2}$. Il découle de l'inégalité triangulaire qu'une des deux inégalités suivantes est vérifiée :

$$||f(v_0)-f(m)||_F-(g(v_0)-g(m)) \geq \frac{M}{2} \qquad \text{ou} \qquad ||f(m)-f(u_0)||_F-(g(m)-g(u_0)) \geq \frac{M}{2}.$$

On note $[u_1; v_1]$ un des deux intervalles $[u_0; m]$ ou $[m; v_0]$ où cette inégalité est vérifiée. En réitérant ce procédé, on construit ainsi de proche en proche une suite d'intervalles emboîtés $[u_n; v_n]$ tels que

$$\forall n \geq 0, \quad ||f(v_n) - f(u_n)||_F - (g(v_n) - g(u_n)) \geq \frac{M}{2^n}, \qquad \text{et} \qquad v_n - u_n = \frac{v-u}{2^n}.$$

Par le théorème des segments emboîtés, les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une même limite $w \in [u; v]$. On a alors

$$\begin{aligned}
\frac{M}{2^n} &\leq ||f(v_n) - f(u_n)||_F - g(v_n) - g(u_n) \\
&\leq ||f(v_n) - f(w)||_F - g(v_n) - g(w) + ||f(w) - f(u_n)||_F - g(w) - g(u_n) \\
&\leq ||d_w f(v_n - w) + o(v_n - w)||_F - g'(w) \cdot (v_n - w) + o(v_n - w) \\
&\quad + ||d_w f(w - u_n) + o(w - u_n)||_F - g'(w) \cdot (w - u_n) + o(w - u_n) \\
&\leq (||d_w f(1)||_F - g'(w)) \cdot (v_n - u_n) + o(v_n - w) + o(w - u_n).
\end{aligned}$$

Puisque $\lim v_n - w = \lim w - u_n = \lim v_n - u_n = 0$, on a donc

$$\frac{M}{2^n} \leq (||d_w f(1)||_F - g'(w)) \cdot (v_n - u_n) + o(v_n - u_n).$$

En divisant chaque membre par $v_n - u_n = \frac{v-u}{2^n}$, on obtient alors

$$\frac{M}{v-u} \leq ||d_w f(1)||_F - g'(w) + o(1).$$

Ce qui donne, en faisant tendre n vers $+\infty$,

$$||d_w f(1)||_F - g'(w) \geq \frac{M}{v-u} > 0,$$

ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé. ☺

La Proposition 2.3.1 et le Théorème 2.1.2 impliquent le théorème suivant.

Théorème 2.3.2 (Inégalité des accroissements finis généralisée)**.** *Soit $(E, ||\cdot||_E)$ et $(F, ||\cdot||_F)$ deux espaces de Banach de dimension finie, U un ouvert de E, et $f : U \to F$ une fonction différentiable sur U. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|||d_x f||| \leq M$ pour tout $x \in U$. Alors pour tous points x et y dans U tels que $[x; y] \subset U$, on a*

$$||f(x) - f(y)||_F \leq M \cdot ||x - y||_E$$

Démonstration. On considère la fonction différentiable

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & [0;1] & \longrightarrow & U \\ & t & \longmapsto & (1-t)x + ty \end{array}$$

La fonction $f \circ \gamma : [0; 1] \to F$ est différentiable sur $[0; 1]$, et on a

$$d_t(f \circ \gamma)(1) = d_{\gamma(t)} f \circ \gamma'(t) = d_{\gamma(t)} f(y - x)$$

et donc

$$|||d_t(f \circ \gamma)||| \leq M \cdot ||x - y||_E.$$

On applique maintenant la Proposition 2.3.1 à la fonction $f \circ \gamma$ et à $g(t) = M \cdot ||x-y||_E \cdot t$ pour $t \in [0; 1]$. ☺

2.3.2 Applications

Le Théorème 2.3.2 a des conséquences très importantes. Nous en donnons quelques unes ci dessous.

Proposition 2.3.3. *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert connexe de E, et $f : U \to F$ une fonction différentiable. Si $d_x f$ est nulle pour tout $x \in U$, alors f est une fonction constante.*

Démonstration. Comme U est connexe, il suffit de montrer que f est une fonction localement constante. Soit donc $x \in U$. Puisque U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, il existe une boule ouverte $B \subset U$ contenant x. Une boule ouverte est convexe, dont le Théorème 2.3.2 implique que f est constante sur B. ☺

Proposition 2.3.4. *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert de E, et $f : U \to F$ une fonction de classe C^1. Alors f est localement lipschitzienne en tout point de U, i.e. pour tout $x \in U$, il existe un ouvert $V \subset U$ et une constante $M \in \mathbb{R}^+$ tels que*

$$\forall y, z \in V, \qquad ||f(y) - f(z)||_F \leq M \cdot ||y - z||_E.$$

Démonstration. On prend $V \subset U$ une boule ouverte contenant x et telle que $\overline{V} \subset B$. Comme f est de classe C^1 sur U, la fonction $y \to d_y f$ est continue sur $\overline{V}$ qui est compact car E est de dimension finie. Donc cette fonction est bornée sur $\overline{V}$, i.e. il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\sup_{y \in \overline{V}} |||d_y f||| \leq M.$$

On applique maintenant le Théorème 2.3.2. ☺

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le Théorème 2.2.9.

Théorème 2.3.5. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une fonction. Si toutes les dérivées partielles de f existent au voisinage de $x \in U$ et sont continues en x, alors f est différentiable en $x \in U$.*

De plus, f est de classe C^1 sur U si et seulement si toutes les dérivées partielles de f existent et sont continues sur U.

Démonstration. Au vu du Corollaire 2.2.15, il suffit de montrer la première affirmation du théorème. L'idée de la preuve est assez simple : si f est différentiable en x, alors la matrice de sa différentielle est nécessairement la matrice jacobienne de f en x ; il reste alors à vérifier que la différence de $f(x+h)$ et $f(x) + d_x f(h)$ est bien négligeable devant $||h||_\infty$ (ou toute autre norme sur $\mathbb{R}^n$), ce qui sera une conséquence du théorème des accroissements finis. Par la Proposition 2.1.22, on peut se restreindre au cas $m = 1$, c'est à dire au cas d'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$.

On étudie donc la fonction

$$g(h) = f(x+h) - f(x) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i,$$

définie sur une petite boule centrée en 0. Les dérivées partielles de g existent dans toutes les directions, et la règle de différentiation d'une fonction composée donne

$$\frac{\partial g}{\partial h_i}(h) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+h) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque les dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial h_i}$ sont continues en 0, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall i = 1, \cdots, n, \quad \forall h \in B(0, \delta), \quad \left| \frac{\partial g}{\partial h_i}(h) \right| \leq \frac{\varepsilon}{n}.$$

On a

$$g(h) = \phi(h_1) + \phi_{h_1}(h_2) + \cdots + \phi_{h_1, \cdots, h_{n-1}}(h_n),$$

où

$$\begin{aligned}
\phi(h_1) &= f(x_1+h_1,x_2,\cdots,x_n) - f(x_1,\cdots,x_n) - h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\\
\phi_{h_1}(h_2) &= f(x_1+h_1,x_2+h_2,x_3,\cdots,x_n) - f(x_1+h_1,\cdots,x_n) - h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(x),\\
&\ \vdots\\
\phi_{h_1,\cdots,h_{n-1}}(h_n) &= f(x_1+h_1,x_2+h_2,\cdots,x_n+h_n) - f(x_1+h_1,\cdots,x_{n-1}+h_{n-1},x_n)\\
&\quad - h_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(x).
\end{aligned}$$

On a

$$\phi'_{h_1,\cdots,h_{i-1}}(h_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1+h_1,\cdots,x_i+h_i,x_{i+1},\cdots,x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(x),$$

et donc

$$\forall h\in B(0,\delta),\ |\phi'_{h_1,\cdots,h_{i-1}}(h_i)| \le \frac{\varepsilon}{n}.$$

Par l'Inégalité des Accroisements Finis, on obtient alors

$$\forall h\in B(0,\delta),\ |\phi_{h_1,\cdots,h_{i-1}}(h_i)| = |\phi_{h_1,\cdots,h_{i-1}}(h_i) - \phi_{h_1,\cdots,h_{i-1}}(0)| \le \frac{\varepsilon}{n}||h||,$$

et donc

$$\forall h\in B(0,\delta),\ |g(h)| \le \varepsilon||h||,$$

soit $g(h) = o(||h||_\infty)$ comme désiré. ☺

2.3.3 Exercices

Exercice 2.3.1. Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = (1+\frac{1}{4}\sin(x+y), \frac{2}{3}\cos(1+x-y)).$$

1. Calculer la matrice jacobienne de f en un point (x,y) de $\mathbb{R}^2$.
2. Quelle est la norme de la différentielle $d_{(x,y)}f$ en un point (x,y) de $\mathbb{R}^2$?
3. En déduire que f est Lipschitzienne de rapport strictement inférieur à 1 (que l'on précisera).
4. Retrouver ce résultat par un calcul direct sans utiliser la différentielle de f.
5. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 2.3.2. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|(x,y)\|_1 = |x|+|y|$, et on considère la fonction

$$f:\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (\cos(x+y),\sin(x-y)) \end{array}.$$

1. Calculer la matrice jacobienne de f en un point (x, y) de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que
$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2, \ \|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)\|_1 \leq 2\|((x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_1.$$
3. Déduire que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$(\alpha, \beta) = (a, b) + \frac{1}{3} f(\alpha, \beta).$$

2.4 Théorème d'inversion locale

2.4.1 Difféomorphisme

Définition 2.4.1. *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert de E, V un ouvert de F, et $f : U \to V$ une fonction. On dit que f est un difféomorphisme si f est une bijection différentiable, et si f^{-1} est aussi différentiable. Si de plus f et f^{-1} sont toutes les deux de classe C^1, on dit que f est un C^1-difféomorphisme.*

Remarque 2.4.2. On verra au Corollaire 2.4.14 que si f est un difféomorphisme de classe C^1, alors c'est un C^1-difféomorphisme (i.e. f^{-1} est automatiquement de classe C^1).

Exemple 2.4.3. La fonction tan $:] - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ est un C^1-difféomorphisme : son inverse est la fonction arctan, dont la dérivée est $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

Exemple 2.4.4. Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, et $f \in \mathcal{GL}(E, F)$. Alors f est une bijection de classe C^1, car linéaire, de même que f^{-1}. C'est donc un C^1-difféomorphisme.

Étant donné un difféomorphisme f, la différentielle de f^{-1} se calcule en fonction de df.

Proposition 2.4.5. *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert de E, V un ouvert de F, et $f : U \to V$ un difféomorphisme. Alors $d_x f \in \mathcal{GL}(E, F)$ pour tout $x \in U$, et*
$$\forall y \in V, \quad d_y f^{-1} = (d_{f^{-1}(y)} f)^{-1}.$$

Démonstration. On a $f \circ f^{-1} = Id$, donc en prenant la différentielle des deux côtés de l'égalité on obtient
$$\forall y \in V, \quad d_{f^{-1}(y)} f \circ d_y f^{-1} = Id.$$
Donc $d_x f$ est bien inversible pour tout x dans U, d'inverse $d_{f(x)} f^{-1}$. ☺

Corollaire 2.4.6. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, V un ouvert de $\mathbb{R}^m$, et $f : U \to V$ un difféomorphisme. Alors $n = m$.*

Démonstration. Puisque $d_x f$ est une application linéaire inversible entre deux espaces vectoriels de dimension finie, ces dimensions coïncident. ☺

La réciproque de la Proposition 2.4.5 n'est pas vraie en général, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 2.4.7. On considère la fonction suivante, appelée exponentielle complexe

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ (x,y) & \longmapsto & (e^x \cos(y), e^x \sin(y)) \end{array}.$$

La fonction f n'étant pas injective, ce n'est pas une bijection, et encore moins un difféomorphisme. Cependant, la différentielle de f est inversible pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ puisque

$$Jac_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} e^x \cos(y) & -e^x \sin(y) \\ e^x \sin(y) & e^x \cos(y) \end{pmatrix},$$

matrice de déterminant $e^x \neq 0$.

2.4.2 Difféomorphisme local

Dans le cas des difféomorphismes de classe C^1, la Proposition 2.4.5 admet une réciproque *locale*. En d'autres termes, si on accepte de restreindre les domaines de départ et d'arrivée de f, alors la Proposition 2.4.5 admet une réciproque. C'est exactement le contenu du Théorème d'inversion locale 2.4.11 ci-dessous.

Définition 2.4.8. *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert de E, et $f : U \to F$ une fonction. On dit que f est un C^1-difféomorphisme* local *en $x \in U$ si il existe un voisinage ouvert U_1 de x dans U tel que la restriction*

$$f_{|U_1} : U_1 \to f(U_1)$$

est un C^1-difféomorphisme.

Exemple 2.4.9. Un C^1-difféomorphisme est un C^1-difféomorphisme local en tout point. Attention, la réciproque n'est pas vraie, comme le montre l'Exemple 2.4.10

Exemple 2.4.10. L'exemple typique de C^1-difféomorphisme local non global est celui de la fonction de classe C^1

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^{+,*} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}.$$

Cette fonction n'est pas injective sur $\mathbb{R}^*$, donc n'est pas un difféomorphisme. En revanche, la restriction de f à $\mathbb{R}^{+,*}$ (resp. $\mathbb{R}^{-,*}$) est une bijection d'inverse $x \mapsto \sqrt{x}$ (resp. $x \mapsto -\sqrt{x}$) qui est de classe C^1. Donc f est un difféomorphisme local sur $\mathbb{R}^*$.

On peut bien sûr considérer la fonction f sur $\mathbb{R}$ tout entier, mais la fonction $x \to x^2$ n'est injective sur aucun voisinage de 0. En particulier, ce n'est pas un C^1-difféomorphisme local en 0. On remarque que ces deux cas sont distingués par $f'(x)$, qui est non nulle sauf pour $x = 0$. Le Théorème 2.4.11 ci-dessous généralise cette dernière remarque.

Le théorème suivant fournit un critère très simple pour établir qu'une fonction est un difféomorphisme local. Sa démonstration est une application du Théorème du point fixe de Banach et de l'Inégalité des accroissements finis.

Théorème 2.4.11 (Theorème d'inversion locale)**.** *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert de E, et $f : U \to F$ une fonction de classe C^1. Si $d_x f \in \mathcal{GL}(E, F)$, alors f est un C^1-difféomorphisme local en $x \in U$.*

Démonstration. Étant donné $x_0 \in U$, on veut montrer que f est un difféomorphisme local en x_0. La démonstration est un peu technique et comprend plusieurs étapes.

Étape 1. On se ramène tout au cas où $x_0 = f(x_0) = 0$. On considère les automorphismes linéaires

$$\begin{array}{rccc} \phi : & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & x + x_0 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \psi : & F & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & x - f(x_0) \end{array},$$

et on pose $g = \psi \circ f \circ \phi$. Étant linéaires inversibles, les applications ϕ et ψ sont des C^1-difféomorphismes. On a de plus $g(0) = 0$ et

$$d_0 g = \psi \circ d_{x_0} f \circ \phi.$$

Donc f est un C^1-difféomorphisme local en x_0 si et seulement si g est un C^1-difféomorphisme local en 0.

On suppose désormais que $x_0 = f(x_0) = 0$.

Étape 2. Montrons qu'il existe un voisinage W de 0 dans E et un voisinage V de 0 dans F tels que $f|_W : W \to V$ soit une bijection. C'est à dire on cherche W et V tels que $f(W) = V$, et l'équation $y = f(x)$ a une unique solution dans W pour tout y dans V. On se fixe $k \in]0; 1[$. Pour $y \in \mathbb{R}^n$, on définit la fonction

$$\begin{array}{rccc} \Phi_y : & U & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & x - (d_0 f)^{-1}(f(x) - y) \end{array}.$$

Par définition de Φ_y on a

$$y = f(x) \Longleftrightarrow \Phi_y(x) = x,$$

on s'est donc ramené à étudier les points fixes de Φ_y.

La fonction Φ_y est de classe C^1, et on a

$$d_x\Phi_y = Id_E - (d_0 f)^{-1} \circ d_x f.$$

On remarque que $d_x\Phi_y$ ne dépend pas de y. On a $d_0\Phi_y = 0$, donc par continuité de $d\Phi_y$ on en déduit

$$\exists r > 0,\ \forall x \in B(0,r),\ |||d_x\Phi_y||| \leq k.$$

En particulier, la fonction Φ_y est k-lipschitzienne sur $\overline{B}(0,r)$ par L'Inégalité des accroissements finis. Quitte à prendre r plus petit si nécessaire, on peut supposer que $\overline{B}(0,r) \subset U$. De plus, comme $d_x\Phi_y$ ne dépend pas de y, on peut aussi choisir r indépendemment de y. La fonction Φ_y étant k-lipschitzienne, on a

$$\forall x \in \overline{B}(0,r),\ ||\Phi_y(x) - \Phi_y(0)|| \leq k \cdot ||x|| \leq kr.$$

On considère l'ensemble

$$V = \{y \in F \mid ||\Phi_y(0)|| < (1-k)r\}.$$

Comme $\Phi_y(0) = -(d_0 f)^{-1}(y)$ et que $d_0 f$ est un homéomorphisme, l'ensemble V est un ouvert de F. De plus, pour $y \in V$

$$\forall x \in \overline{B}(0,r),\ ||\Phi_y(x)|| \leq ||\Phi_y(x) - \Phi_y(0)|| + ||\Phi_y(0)|| \leq kr + (1-k)r = r.$$

On a donc montré que la boule fermée $\overline{B}(0,r)$ est stable par Φ_y si $y \in V$. Or $\overline{B}(0,r)$ est complet, et Φ_y y est k-lipschitzienne. D'après le Théorème du point fixe de Banach, on obtient

$$\forall y \in V,\ \exists! x \in \overline{B}(0,r),\ y = f(x).$$

En posant $W = \overline{B}(0,r) \cap f^{-1}(V)$, on a alors que $f|_W : W \to V$ est une bijection.

On suppose désormais que $U = W$. On a ainsi une fonction $f^{-1} : V \to W$.

Étape 3. Montrons que la fonction f^{-1} est lipschitzienne, et donc continue, sur V. Soit $y_1, y_2 \in V$, et notons $x_i = f^{-1}(y_i)$. D'après ce qui précède $\Phi_{y_i}(x_i) = x_i$, et donc

$$\begin{aligned}
||f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)|| &= ||x_1 - x_2|| \\
&\leq ||\Phi_{y_1}(x_1) - \Phi_{y_1}(x_2)|| + ||\Phi_{y_1}(x_2) - \Phi_{y_2}(x_2)|| \\
&\leq k \cdot ||x_1 - x_2|| + ||(d_0 f)^{-1}(y_2 - y_1)|| \\
&\leq k \cdot ||f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)|| + |||(d_0 f)^{-1}||| \cdot ||y_1 - y_2||.
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$||f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)|| \leq \frac{|||(d_0 f)^{-1}|||}{1-k} \cdot ||y_1 - y_2||,$$

et f^{-1} est bien lipschitzienne sur V.

Étape 4. Montrons que la fonction f^{-1} est de classe C^1 sur V. Soit $x \in B(0,r)$. On sait que pour $y \in F$, on a $|||d\Phi_y(x)||| \leq k < 1$, et que $d\Phi_y(x) = Id_E - (d_0 f)^{-1} \circ d_x f$. On en déduit alors[1] que $Id_E - d\Phi_y(x) = (d_0 f)^{-1} \circ d_x f$ est inversible, et que donc $d_x f$ est aussi inversible.

Un développement limité de f en x s'écrit

$$f(x_1) - f(x) = d_x f(x - x_1) + o(||x - x_1||).$$

En notant $y = f(x)$ et $y_1 = f(x_1)$, et en multipliant les deux côtés par $(d_x f)^{-1}$, on obtient

$$(d_x f)^{-1}(y_1 - y) = f^{-1}(y) - f^{-1}(y_1) + (d_x f)^{-1}(o(||x - x_1||)).$$

Comme f^{-1} est lipschitzienne, $o(||x - x_1||) = o(||y - y_1||)$. Comme $x \to (d_x f)^{-1}$ est de classe C^1, alors $(d_x f)^{-1}(o(||x - x_1||)) = o(||y - y_1||)$. En récapitulant, on a donc obtenu

$$f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y) = (d_{f^{-1}(y)} f)^{-1}(y - y_1) + o(||y - y_1||),$$

c'est à dire que f^{-1} est différentiable sur V et que

$$\forall y \in V,\ d_y f^{-1} = (d_{f^{-1}(y)} f)^{-1}.$$

Le caractère C^1 de f^{-1} découle maintenant de celui de f. ☺

Exemple 2.4.12. L'exponentielle complexe de l'Exemple 2.4.7 est un difféomorphisme local en tout point de $\mathbb{R}^2$. Pour se convaincre que le Théorème 2.4.11 est loin d'être trivial, on pourra chercher à écrire explicitement les inverses locaux de cette fonction.

Exemple 2.4.13. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1. Alors f est un C^1-difféomorphisme local en $x \in U$ si et seulement si $\det Jac_x(f) \neq 0$.

Un corollaire immédiat du Théorème 2.4.11 est que ce qui empêche un difféomorphisme local d'être un difféomorphisme global est précisément un défaut d'injectivité.

Corollaire 2.4.14. *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert de E, et $f : U \to F$ une fonction de classe C^1. Si $d_x f \in \mathcal{GL}(E,F)$ pour tout $x \in U$ et si f est injective, alors f est un C^1-difféomorphisme de U sur $f(U)$.*

Démonstration. Puisque f est injective, c'est une bijection sur son image. En notant $V = f(U)$, on a donc une fonction $f^{-1} : V \to U$ inverse de f. Comme $d_x f \in \mathcal{GL}(E,F)$ pour tout $x \in U$, le Théorème d'inversion locale implique que f est un difféomorphisme local en tout point de U. En particulier, V est un ouvert de F, et f^{-1} est de classe C^1. ☺

1. On a vu à L'Exercice 1.7.6 que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $|||A||| < 1$ pour une norme matricielle quelconque, alors $I_n - A \in GL_n(\mathbb{R})$.

2.4.3 Exercices

Exercice 2.4.1. On se fixe une norme $||\cdot||$ quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $||I_n - A|| < \varepsilon$, alors il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^3 = A$.

Exercice 2.4.2. Montrer que si a et b sont deux réels assez proches de 1, alors il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que

$$y + e^{xy} = a \qquad \text{et} \qquad x + e^{-xy} = b.$$

Exercice 2.4.3. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 telle que $d_x f$ est inversible pour tout $x \in U$. Montrer que $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2.4.4. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 telle que $f(0) = 0$ et $d_x f \in O_n(\mathbb{R})$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ et de la norme euclidienne $||\cdot||_2$ standards.

1. Montrer que f est lipschitzienne de rapport 1 sur $\mathbb{R}^n$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^n$ tel que la restriction de f à U soit une isométrie (i.e. $||f(z) - f(y)||_2 = ||z - y||_2$ pour tous $y, z \in U$).
3. Montrer que

$$\forall y, z \in U,\ \forall h, k \in \mathbb{R}^n,\ \langle d_y f(h), d_z f(h)\rangle = \langle h, h\rangle.$$

   Indication : on pourra différencier l'égalité

$$\forall y, z \in U,\ \langle f(y), f(z)\rangle = \langle y, z\rangle.$$

4. En déduire que $y \mapsto d_y f$ est constante sur U, puis que $f \in O_n(\mathbb{R})$.

2.5 Différentielles d'ordre supérieur

Comme dans le cas des fonctions d'une variable réelle, on peut différentier la différentielle, différentier la différentielle de la différentielle, ... Une difficulté dans le cas des fonctions à plusieurs variables est que l'espace d'arrivée change lorsque l'on passe d'une fonction $f : U \subset E \to F$ à sa différentielle $df : U \to \mathcal{L}(E, F)$. La différentielle de la différentielle est donc par définition une fonction de U dans $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$, ce qui n'apparaît pas forcément comme intuitif au premier abord. Cette section est consacrée à clarifier cet aspect, et à généraliser les Formules de Taylor bien connues dans le cas des fonctions d'une variable réelle.

2.5.1 Fonctions de classe C^k

La différentiabilité à l'ordre k se définit par récurrence.

Définition 2.5.1. *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert de E, et $f : U \to F$ une fonction. Étant donné $k \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est k fois différentiable en $x \in U$ (resp. de classe C^k sur U) si f est différentiable en x et si $df : U \to \mathcal{L}(E, F)$ est $k-1$ fois différentiable en x (resp. de classe C^{k-1} sur U). On dit que f est de classe C^∞ si elle est de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.*

Si f est k fois dérivable en $x \in U$, on note $d_x^k f$ la différentielle d'ordre $k-1$ de df en x.

Exemple 2.5.2. Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors la différentielle

$$df : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{L}(E, F) \\ x & \longmapsto & f \end{array}$$

est une application constante, donc différentiable et

$$\forall x \in E,\ d_x^2 f = 0.$$

Exemple 2.5.3. On a vu à l'Exemple 2.1.14 que la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^2 \end{array}$$

est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que

$$df : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \\ A & \longmapsto & (H \mapsto AH + HA) \end{array}.$$

Ainsi, la différentielle df est une application linéaire, et on a

$$\forall A, K \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ d_A^2 f(K) = d_A(df)(K) = (H \mapsto KH + HK)$$

d'après l'exemple 2.5.2. L'identité précédente se réécrit

$$\forall A, K, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ d_A^2 f(K)(H) = KH + HK,$$

écriture qu'il est raisonnable de vouloir raccourcir en

$$\forall A, K, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ d_A^2 f(K, H) = KH + HK.$$

Nous allons justifier cette écriture à la proposition suivante. Remarquons aussi au passage que $d_A^2 f$ est symétrique, i.e. $d_A^2 f(K, H) = d_A^2 f(H, K)$. Cela est en fait un phénomène général, comme on le verra au Théorème 2.5.13 et au Corollaire 2.5.14.

À priori, $d^2 f$ est une fonction à valeurs dans $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$, et plus généralement $d^k f$ est une fonction à valeurs dans $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, \cdots, \mathcal{L}(E, F)) \cdots)$, où s'emboîtent k termes $\mathcal{L}(E, \cdot)$. La proposition suivante offre un point de vue qui permet de simplifier les choses. Étant donné $k \geq 1$, on note par $\mathcal{L}^k(E, F)$ l'espace des application k-linéaires sur E^k à valeur dans F, i.e. l'espaces des fonctions

$$\begin{array}{rccc} \phi : & E \times \cdots \times E & \longrightarrow & F \\ & (v_1, \cdots, v_k) & \longmapsto & \phi(v_1, \cdots, v_k) \end{array}$$

telles que $v_i \mapsto \phi(v_1, \cdots, v_k)$ est linéaire pour tous vecteurs $v_1, \cdots, v_{i-1}, v_{i+1}, \cdots, v_k$ de E.

Proposition 2.5.4. *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Alors pour tout entier $k \geq 2$, l'application*

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathcal{L}(E, \mathcal{L}^{k-1}(E, F)) & \longrightarrow & \mathcal{L}^k(E, F) \\ & \psi & \longmapsto & \big((v_1, \cdots, v_k) \to \psi(v_1)(v_2, \cdots, v_k)\big) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel.

Démonstration. La fonction Ψ est clairement linéaire et injective. Pour voir qu'elle est surjective, il suffit d'observer qu'elle admet la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}^k(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E, \mathcal{L}^{k-1}(E, F)) \\ \phi & \longmapsto & \Big((v_1 \to \Big((v_2, \cdots, v_k) \mapsto \psi(v_1, v_2, \cdots, v_k)\Big)\Big) \end{array}$$

pour inverse. ☺

Corollaire 2.5.5. *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert de E, et $f : U \to F$ une fonction k fois différentiable en $x \in U$. Alors $d_x^k f$ est une application k-linéaire.*

Étant donné deux espaces vectoriels normés $(E, ||\cdot||_E)$ et $(F, ||\cdot||_F)$ et une application k-linéaire $\phi : E^k \to F$, on pose

$$|||\phi||| = \sup_{||x_1||_E = ||x_2||_E = \cdots = ||x_k||_E = 1} ||\phi(x_1, \cdots, x_k)||_F.$$

La preuve du la proposition suivante est strictement analogue au cas des fonctions linéaires, et est laissée en exercice.

Proposition 2.5.6. *Soit $(E, ||\cdot||_E)$ et $(F, ||\cdot||_F)$ deux espaces vectoriels normés de dimension finie. Alors $|||\cdot|||$ définit une norme sur $\mathcal{L}^k(E, F)$, et*

$$|||\phi||| = \max_{||x_1||_E = ||x_2||_E = \cdots = ||x_k||_E = 1} ||\phi(x_1, \cdots, x_k)||_F.$$

2.5.2 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Comme dans le cas de la différentielle, il est possible d'exprimer $d_x^k f$ en fonction des dérivées partielles d'ordre k de f.

Définition 2.5.7. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction. On dit que f admet une dérivée partielle d'ordre k le long de $x_{i_1}, \cdots x_{i_k}$ en x si f admet une dérivée partielle le long de x_{i_k} en x et si $\frac{\partial f}{\partial x_{i_k}}$ admet une dérivée partielle d'ordre $k-1$ le long de $x_{i_1}, \cdots x_{i_{k-1}}$ en x.*

Dans ce cas, on utilise la notation

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\, \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}}(x) := \frac{\partial^{k-1}}{\partial x_{i_1}\, \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_{k-1}}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_k}} \right)(x).$$

Remarquons que l'on a aussi

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\, \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}}(x) = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2}\, \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} \right)(x).$$

Exemple 2.5.8. Considérons encore une fois la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, xy) \end{array}.$$

On a vu que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (1,y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (1,x),$$

et on calcule sans peine

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = (0,0), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = (0,1), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (0,0).$$

La différentielle de f étant donnée par la matrice jacobienne de f, le Théorème 2.2.9 implique immédiatement par récurrence le résultat suivant.

Théorème 2.5.9. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une fonction. Alors f est classe C^k si seulement si toutes les dérivées partielles d'ordre k de f existent et sont continues sur U.*

Exemple 2.5.10. Une fonction polynomiale $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe C^∞. En particulier, l'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est de classe C^∞.

Toujours par une récurrence immédiate, la Proposition 2.5.4 se traduit en termes de dérivées partielles comme suit.

Proposition 2.5.11. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une fonction k fois différentiable en $x \in U$. Alors pour tout $h_1, \cdots, h_k \in \mathbb{R}^n$, on a*

$$d_x^k f(h_1, \cdots, h_k) = \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_k = 1}^{n} h_{1,i_1} \cdots h_{k,i_k} \cdot \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\, \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}}(x)$$

où $h_i = (h_{i,1}, \cdots, h_{i,n})$.

Exemple 2.5.12. Pour la fonction f de l'Exemple 2.5.8, on a

$$d^2_{(x,y)} f((h_1, h_2), (k_1, k_2)) = (0, h_1 k_2 + h_2 k_1).$$

Une dérivée partielle d'ordre k dépend à priori de l'ordre des $x_{i_1}, \cdots x_{i_k}$. Les deux résultats suivant montrent qu'il n'en est rien si f est k fois différentiable, comme on a déjà pu le constater aux Exemples 2.5.2, 2.2.2 et 2.5.12.

Théorème 2.5.13 (Schwartz)**.** *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une fonction 2 fois différentiable en $x \in U$. Alors pour tous indices $i, j = 1, \cdots n$, on a*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}(x).$$

Démonstration. Le théorème est équivalent à montrer que la différentielle seconde $d_x^2 f$ est une application bilinéaire symétrique, i.e.

$$\forall h, k \in \mathbb{R}^n,\ d_x^2 f(h, k) = d_x^2 f(k, h).$$

Pour cela posons

$$\Delta(h, k) = f(x + h + k) - f(x + h) - f(x + k) + f(x) - d_x^2 f(h, k).$$

Nous allons montrer que $\Delta(h, k) = o(||(h, k)||_\infty^2)$. Comme

$$\Delta(h, k) - \Delta(k, h) = d_x^2 f(k, h) - d_x^2 f(h, k),$$

cela entraînera

$$||d_x^2 f(k, h) - d_x^2 f(h, k)||_\infty = o(||(h, k)||_\infty^2),$$

et donc que $d_x^2 f(k, h) - d_x^2 f(h, k) = 0$ d'après l'Exercice 2.5.1.

On fixe h et on pose

$$g(k) = f(x + h + k) - f(x + h) - f(x + k) + f(x) - d_x^2 f(h, k).$$

La fonction g est différentiable et

$$d_k g(u) = d_{x+h+k} f(u) - d_{x+k} f(u) - d_x^2 f(h, u).$$

On se fixe les normes $||\cdot||_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$. On remarque que

$$d_{x+h+k}f - d_{x+k}f - d_x^2 f(h) = d_{x+h+k}f - d_x f - d_x^2 f(h+k) - (d_{x+k}f - d_x f - d_x^2 f(k)),$$

et par différentiabilité de df en x on a alors

$$|||d_k g||| = o(||(h,k)||_\infty).$$

L'Inégalité des accroissements finis nous assure à son tour que

$$\begin{aligned} ||\Delta(h,k)||_\infty &= ||g(k) - g(0)||_\infty \\ &\leq \sup_{[0;k]} |||d_k g||| \cdot ||k||_\infty \\ &= o(||(h,k)||_\infty^2), \end{aligned}$$

comme annoncé. ☺

Corollaire 2.5.14. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une fonction k fois différentiable en $x \in U$. Alors pour tous indices $i_1, \cdots, i_k = 1, \cdots n$, et toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, on a*

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\, \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}}(x) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{\sigma(i_1)}\, \partial x_{\sigma(i_2)} \cdots \partial x_{\sigma(i_k)}}(x)$$

Démonstration. Toute permutation se décompose en un produit de l transpositions, et le résultat se déduit alors du Théorème 2.5.13 par récurrence sur l. ☺

Le corollaire précédant se reformule ainsi : la différentielle k-ème $d_x^k f$ n'est pas seulement k-linéaire, c'est aussi une fonction symétrique, i.e.

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_k,\ d_x^k f(h_1, \cdots, h_k) = d_x^k f(h_{\sigma(1)}, \cdots, h_{\sigma(k)}).$$

2.5.3 Formules de Taylor

Les Formules de Taylor permettent d'écrire des développements limités d'ordre supérieur de fonctions suffisamment régulières.

Théorème 2.5.15 (Formule de Taylor-Young)**.** *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert de E, et $f : U \to F$ une fonction k fois fois différentiable au voisinage de $x \in U$. Alors*

$$f(x+h) = f(x) + d_x f(h) + \frac{1}{2!} d_x^2 f(h,h) + \cdots + \frac{1}{k!} d_x^k f(h, \cdots, h) + o(||h||^k).$$

Démonstration. Pour $k = 1$, c'est la définition de la différentielle. Supposons $k \geq 2$ et la propriété vraie au rang $k - 1$. On pose

$$g(h) = f(x+h) - f(x) - d_x f(h) - \frac{1}{2!} d_x^2 f(h,h) + \cdots - \frac{1}{k!} d_x^k f(h, \cdots, h).$$

Alors la fonction g est k fois différentiable au voisinage de 0. De plus comme $d^i f$ est une fonction i-linéaire symétrique, on a

$$d_h \left(d_x^i f(h, \cdots, h) \right)(k) = i \cdot d_x^i f(k, h, \cdots, h),$$

ce qui donne

$$d_h g(k) = d_{x+h} f(k) - d_x f(k) - d_x^2 f(k,h) - \cdots - \frac{1}{(k-1)!} d_x^k f(k, h, \cdots, h),$$

et donc

$$|||d_h g||| \leq |||d_{x+h} f - d_x f - d_x^2 f(h) - \cdots - \frac{1}{(k-1)!} d_x^k f(h, \cdots, h)|||.$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence à df, on obtient alors

$$|||d_h g||| = o(||h||^{k-1}).$$

En appliquant maintenant l'Inégalité des accroissements finis, on obtient

$$||g(h)|| \leq o(||h||^{k-1})||h|| = o(||h||^k)$$

ce qui est ce qu'on voulait démontrer. ☺

Dans le cas d'une fonction de classe C^{k+1}, on peut donner une expression plus précise du reste du développement limité.

Théorème 2.5.16 (Formule de Taylor avec reste intégral)**.** *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert de E, et $f : U \to F$ une fonction de classe C^{k+1}. Soit $x \in U$ et $h \in \mathbb{R}^n$ tels que $[x; x+h] \subset U$. Alors*

$$\begin{aligned} f(x+h) = & f(x) + d_x f(h) + \frac{1}{2!} d_x^2 f(h,h) + \cdots + \frac{1}{k!} d_x^k f(h, \cdots, h) \\ & + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} d_{x+th}^{k+1} f(h, \cdots, h) dt. \end{aligned}$$

Démonstration. On définit la fonction $g(t)$ sur $[0; 1]$ par

$$g(t) = f(x+ty) + (1-t) d_{x+th} f(h) + \frac{(1-t)^2}{2!} d_{x+th}^2 f(h,h) + \cdots + \frac{(1-t)^k}{k!} d_{x+th}^k f(h, \cdots, h).$$

On remarque que

$$\frac{d}{dt} d^i_{x+th} f(h, \cdots, h) = d^{i+1}_{x+th} f(h, \cdots, h),$$

ce qui implique que

$$g'(t) = \frac{(1-t)^k}{k!} d^{k+1}_{x+th} f(h, \cdots, h).$$

L'identité

$$g(1) = g(0) + \int_0^1 g'(t) dt$$

donne exactement le théorème. ☺

Théorème 2.5.17 (Inégalité de Taylor-Lagrange)**.** *Soit $(E, ||\cdot||_E)$ et $(F, ||\cdot||_F)$ deux espaces vectoriels normés de dimension finie, U un ouvert de E, et $f : U \to F$ une fonction de classe C^{k+1}. Soit $x \in U$ et $h \in \mathbb{R}^n$ tels que $[x; x+h] \subset U$. Alors*

$$||f(x+h) - f(x) - d_x f(h) - \frac{1}{2!} d^2_x f(h,h) - \cdots - \frac{1}{k!} d^k_x f(h, \cdots, h)||_F \leq \frac{M \cdot ||h||^{k+1}_E}{(k+1)!}$$

où

$$M = \max_{t \in [0;1]} |||d_{x+th} f|||$$

Démonstration. On a la majoration

$$\left|\left| \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} d^{k+1}_{x+th} f(h, \cdots, h) dt \right|\right|_F \leq M \cdot ||h||^{k+1}_E \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} dt = \frac{M \cdot ||h||^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Le théorème découle maintenant de la Formule de Taylor avec reste intégral. ☺

2.5.4 Exercices

Exercice 2.5.1. Soit E_1, E_2, et F trois espaces vectoriels de dimension finie, et $f : E_1 \times E_2 \to F$ une application bilinéaire. Montrer que si $f = o(||(x,y)||^2)$, alors f est la fonction nulle.

Exercice 2.5.2. Montrer qu'une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est de classe C^∞.

Exercice 2.5.3. Calculer la différentielle seconde en un point quelconque d'une application bilinéaire $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Exercice 2.5.4. On définit $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ par

$$f(x,y) = \langle x, y \rangle y.$$

Justifier la différentiabilité de f et calculer $d^2_{(x,y)} f$.

Exercice 2.5.5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{xy^3}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } f(0, 0) = 0$$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ existent et diffèrent. Qu'en déduire ?

Exercice 2.5.6. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer les différentielles d'ordre supérieur de la fonction

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & A & \longmapsto & A^k \end{array}.$$

Exercice 2.5.7. Déterminer approximativement la valeur de $1.05^{1.02}$ avec une erreur d'au plus $\varepsilon < 10^{-2}$.
Indication : Appliquer la Formule de Taylor-Lagrange à la fonction $f(x, y) = x^y$.

Bibliographie

[Car67] Henri CARTAN : *Calcul différentiel.* Hermann, Paris, 1967.

[Gos95] Bernard GOSTIAUX : *Cours de mathématiques spéciales.* Mathématiques. Presses Universitaires de France, Paris, 1995.

[LFA72] Jacqueline LELONG-FERRAND et Jean-Marie ARNAUDIÈS : *Cours de Mathématiques, tome 2 :Analyse.* Dunod, 1972.

[Rou99] François ROUVIÈRE : *Petit guide de calcul différentiel.* Cassini, 1999.

[Ska04] Georges SKANDALIS : *Topologie et analyse 3e année.* Dunod, 2004.