

La conjecture de Heron-Rota-Welsh : un théorème d'Adiprasito-Huh-Katz

• E. BRUGALLÉ

June Huh a reçu la médaille Fields en juillet 2022 pour

l'introduction d'idées de la théorie de Hodge en combinatoire, la preuve de la conjecture de Dowling-Wilson pour les treillis géométriques, la preuve de la conjecture de Heron-Rota-Welsh pour les matroïdes, le développement de la théorie des polynômes lorentziens, et la preuve de la conjecture forte de Mason.¹

L'ambition de ce texte est de présenter au lecteur *néophyte* la conjecture de Heron-Rota-Welsh, et de donner un aperçu de la profondeur et la beauté du chemin qui aura abouti à sa preuve par Adiprasito, Huh et Katz. Notre premier travail sera de rendre intelligible l'énoncé cabalistique suivant.

Théorème 1 (Adiprasito-Huh-Katz, [1]). *Les coefficients du polynôme caractéristique d'un matroïde forment une suite log-concave.*

1. Quésaco?

1.1 – Suites log-concaves

Ce théorème peut être vu comme une vaste généralisation de l'observation suivante :

$$\binom{n}{k}^2 \geq \binom{n}{k-1} \binom{n}{k+1}.$$

Point de mystère dans cette inégalité puisque

$$\frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{n}{k-1} \binom{n}{k+1}} = \frac{k+1}{k} \times \frac{n-k+1}{n-k} \geq 1.$$

Bien que facile à démontrer, cette inégalité est cependant remarquable dans le sens où de nom-

breuses situations en mathématiques font apparaître des suites satisfaisant à une propriété similaire. On dit qu'une suite de nombres réels a_0, \dots, a_n est *log-concave* si elle vérifie

$$\forall k = 1, \dots, n-1, \quad a_k^2 \geq a_{k-1} a_{k+1}.$$

La suite $\left(\binom{n}{k}\right)_{k=0..n}$ est donc log-concave, et nous renvoyons à la très belle synthèse de Stanley [23] pour de nombreux autres exemples.

Devant l'ubiquité de ces suites log-concaves, il est raisonnable de chercher des phénomènes généraux responsables de leurs apparitions. De nombreuses pistes d'investigations s'offrent à nous, et nous renvoyons encore une fois à l'article de Stanley [23] pour une description de plusieurs d'entre elles. Nous nous bornerons ici à indiquer brièvement pourquoi la géométrie algébrique est grande pourvoyeuse de suites log-concaves, fournissant ainsi une source d'inspiration féconde dans des situations parfois bien éloignées.

Mais n'allons pas trop vite et poursuivons le décryptage de l'énoncé du théorème 1. Voyons tout d'abord ce qu'est un matroïde.

1.2 – Des familles de vecteurs...

Considérons une famille $E = \{v_1, \dots, v_n\}$ de vecteurs d'un espace vectoriel V sur un corps \mathbb{K} quelconque. Le *polynôme caractéristique* de E est défini par

$$\chi_E(q) = \sum_{I \subseteq E} (-1)^{|I|} q^{\text{rg}(E) - \text{rg}(I)},$$

où $|I|$ désigne le cardinal de l'ensemble I , et $\text{rg}(I)$ désigne le rang de la famille de vecteurs I . On adopte ici la convention $\text{rg}(\emptyset) = 0$.

1. Traduction libre de « *bringing the ideas of Hodge theory to combinatorics, the proof of the Dowling-Wilson conjecture for geometric lattices, the proof of the Heron-Rota-Welsh conjecture for matroids, the development of the theory of Lorentzian polynomials, and the proof of the strong Mason conjecture* ».

Exemple 1. Si E est formé des vecteurs d'une base de V , alors toute famille $I \subset E$ est de rang $|I|$. On a donc

$$\chi_E(q) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k q^{n-k} = (q-1)^n.$$

Exemple 2. On suppose ici que (v_1, v_2, v_3) est une base de V , et on considère

$$E_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_1+2v_2+v_3\} \text{ et } E_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_1+2v_2\}.$$

On calcule alors

$$\chi_{E_1}(q) = q^3 - 4q^2 + 6q - 3 \text{ et } \chi_{E_2}(q) = q^3 - 4q^2 + 5q - 2.$$

Une remarque importante est que le polynôme $\chi_E(q)$ dépend essentiellement de la fonction rang

$$\begin{array}{ccc} \text{rg} : \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ I & \longmapsto & \text{rg}(I) \end{array}$$

plutôt que de la famille E à proprement parler. Un peu d'algèbre linéaire nous montre que pour tous sous-ensembles I et J de E , on a

- (R1) $\text{rg}(I) \leq |I|$;
- (R2) $\text{rg}(I) \leq \text{rg}(J)$ si $I \subset J$;
- (R3) $\text{rg}(I \cup J) + \text{rg}(I \cap J) \leq \text{rg}(I) + \text{rg}(J)$.

Étant maintenant donné un ensemble fini E , toute fonction $\text{rg} : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{N}$ vérifiant les trois conditions (R1), (R2) et (R3) provient-elle d'une famille de vecteurs indexés par E ? La réponse est non, et c'est le début de la théorie des matroïdes initiée par Whitney dans les années 1930.

1.3 – ... aux matroïdes...

Un *matroïde* M est la donnée d'un ensemble fini E et d'une fonction $\text{rg} : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{N}$ vérifiant les trois conditions (R1), (R2) et (R3). Le *rang* de M est par définition $\text{rg}(E)$. On dira de plus que M est *sans boucle* si \emptyset est le seul élément de $\mathcal{P}(E)$ vérifiant $\text{rg}(I) = 0$ (dans le cas d'une famille de vecteurs, cela signifie que le vecteur nul n'appartient pas à la famille). Tous les matroïdes seront supposés sans boucle dans ce texte. Étant donné un corps \mathbb{K} , on dit qu'un matroïde est \mathbb{K} -*linéaire* s'il peut être construit comme précédemment à partir d'une famille de vecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel. On dit qu'un matroïde est *linéaire* s'il est \mathbb{K} -linéaire pour un certain corps \mathbb{K} .

Exemple 3. Étant donné $n \geq 1$, le matroïde *uniforme* M_n est défini par la fonction

$$\begin{array}{ccc} \text{rg} : \mathcal{P}(\{1, \dots, n\}) & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ I & \longmapsto & |I|. \end{array}$$

Le matroïde M_n est donc le matroïde linéaire associé à la configuration de vecteurs de l'exemple 1.

Comme mentionné plus haut, il existe des matroïdes non linéaires et nous en verrons un exemple un peu plus loin. En fait, s'il existe des matroïdes linéaires sur tout ensemble fini E , leur proportion tend vers 0 lorsque le cardinal de E tend vers l'infini [20]. Les matroïdes constituent ainsi une généralisation combinatoire des relations de dépendance en algèbre linéaire. En particulier, étant donné un matroïde M , on définit son polynôme caractéristique en parfaite analogie avec le cas des familles de vecteurs :

$$\chi_M(q) = \sum_{I \subset E} (-1)^{|I|} q^{\text{rg}(M) - \text{rg}(I)}.$$

Le théorème d'Adiprasito-Huh-Katz affirme ainsi que les coefficients de ce polynôme forment toujours une suite log-concave.

Exemple 4. Les polynômes

$$(q-1)^n \quad q^3 - 4q^2 + 6q - 3 \quad q^3 - 4q^2 + 5q - 2$$

des exemples 1 et 2 sont donc des polynômes caractéristiques de matroïdes, pour lesquels on observe bien la log-concavité des coefficients.

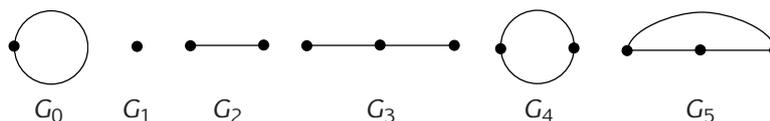
En fait, le théorème 1 est conséquence d'un énoncé plus fort encore. Il n'est pas trop difficile de voir que $\chi_M(1) = 0$, et on appelle polynôme caractéristique *réduit* de M le polynôme

$$\bar{\chi}_M(q) = \frac{\chi_M(q)}{q-1}.$$

Théorème 2 (Adiprasito-Huh-Katz, [1]). Les coefficients du polynôme caractéristique réduit d'un matroïde forment une suite log-concave.

On peut montrer que le théorème 2 implique le théorème 1. Ce dernier a été conjecturé sous cette forme générale par Welsh dans les années 1970, généralisant ainsi une conjecture de Hoggar en théorie des graphes.

FIGURE 1 – Quelques graphes



1.4 – ... en passant par le théorème des quatre couleurs

En effet, à un facteur q^c près, certains polynômes caractéristiques de matroïdes étaient connus dès le début du xx^e siècle sous le nom de *polynômes chromatiques* de graphes. Ces polynômes ont été introduits par Birkhoff en 1912 pour les graphes planaires dans une tentative de démontrer le théorème des quatre couleurs. Si la tentative de Birkhoff s'est finalement avérée vaine, le polynôme chromatique est quant à lui devenu un objet central en combinatoire. Il a été généralisé à tous les graphes par Whitney et Tutte dans les années 1930. Un graphe fini G est la donnée d'un ensemble fini de sommets et d'arêtes, chaque arête reliant deux sommets (potentiellement égaux, on parlera alors de boucle). Étant donné $q \in \mathbb{N}$, on note $\chi_G(q)$ le nombre de manières de colorier les sommets de G avec q couleurs et sans qu'aucune des arêtes de G ne relie deux sommets de même couleur. En particulier $\chi_G(q) = 0$ dès que G contient une arête reliant un sommet à lui-même. Il se trouve que la fonction $\chi_G(q)$ est un polynôme en q , qui vérifie la relation de contraction-suppression suivante :

$$\chi_G(q) = \chi_{G \setminus e}(q) - \chi_{G/e}(q),$$

où e est une arête quelconque de G , le graphe $G \setminus e$ est obtenu en supprimant l'arête e , et G/e est le graphe obtenu en contractant l'arête e .

Exemple 5. Calculons les polynômes chromatiques des graphes représentés à la figure 1. On a clairement $\chi_{G_0}(q) = 0$ et $\chi_{G_1}(q) = q$. En utilisant la relation de contraction-suppression, on obtient

$$\begin{aligned} \chi_{G_2}(q) &= \chi_{G_1}(q)^2 - \chi_{G_1}(q) = q(q-1) \\ \chi_{G_3}(q) &= \chi_{G_1}(q)\chi_{G_2}(q) - \chi_{G_2}(q) = q(q-1)^2 \\ \chi_{G_4}(q) &= \chi_{G_2}(q) - \chi_{G_0}(q) = q(q-1) \\ \chi_{G_5}(q) &= \chi_{G_3}(q) - \chi_{G_4}(q) = q(q-1)(q-2). \end{aligned}$$

Remarquons que le théorème des quatre couleurs est équivalent à $\chi_G(4) > 0$ pour tout graphe planaire G (un graphe est dit planaire sans boucle s'il peut être dessiné dans \mathbb{R}^2 sans que ses arêtes

se coupent, par exemple les graphes représentés à la figure 1). Nous renvoyons au bel article de Julien Marché [19] dans la *Gazette* pour l'apparition du polynôme chromatique des graphes en topologie quantique.

Le théorème 1 démontre en particulier la log-concavité des coefficients du polynôme chromatique d'un graphe, démontrant ainsi une conjecture de Hoggar des années 1960. En effet, on peut associer un matroïde linéaire M_G à un graphe G de sorte que les polynômes chromatiques et caractéristiques sont reliés par la relation

$$\chi_G(q) = q^c \chi_{M_G}(q),$$

où c est le nombre de composantes connexes de G . Pour construire M_G , on choisit au préalable une orientation pour chaque arête e de G . On considère ensuite la matrice A_G dont les lignes et colonnes sont indexées par les sommets et arêtes de G respectivement, et dont le coefficient $c_{v,e}$ est défini par

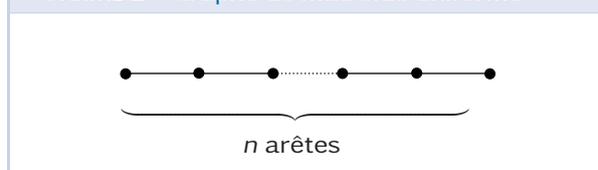
$$c_{v,e} = \begin{cases} 1 & \text{si l'arête } e \text{ est orientée vers le sommet } v; \\ -1 & \text{si l'arête } e \text{ est orientée depuis le sommet } v; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le matroïde M_G est alors le matroïde construit à partir des vecteurs colonnes de la matrice A_G . On pourra vérifier à titre d'exercice que la fonction rg de M_G a la description combinatoire suivante : pour tout sous-ensemble I des arêtes de G , en notant $v(I)$ le nombre de sommets adjacents aux éléments de I et $c(I)$ le nombre de composantes connexes du sous-graphe de G dont les arêtes sont les éléments de I , on a

$$\text{rg}(I) = v(I) - c(I).$$

Exemple 6. Le matroïde associé au graphe représenté à la figure 2 est le matroïde uniforme M_n rencontré dans les exemples 1 et 3.

FIGURE 2 – Graphe de matroïde uniforme



2. Dualité : de l'algèbre à la géométrie

Comme nous l'avons déjà évoqué, la géométrie algébrique est une source de suites log-concaves. Une idée pour attaquer la conjecture de Heron-Rota-Welsh est alors d'associer à un matroïde M un cadre géométrique attestant de la ln-concavité des coefficients de $\bar{\chi}_M(q)$. La dualité vecteur-hyperplan en algèbre linéaire fournit un tel cadre pour les matroïdes linéaires.

Considérons pour simplifier l'espace vectoriel $V = \mathbb{C}^d$. À chaque vecteur non nul $v = (a_1, \dots, a_d)$ de \mathbb{C}^d correspond l'hyperplan de \mathbb{C}^d d'équation

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_dx_d = 0.$$

À une collection $E = \{v_1, \dots, v_n\}$ de vecteurs de \mathbb{C}^d est donc associée une collection $\mathcal{F} = \{\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_n\}$ d'hyperplans de \mathbb{C}^d . La fonction rang sur la famille de vecteurs E se traduit en la fonction codimension sur la famille \mathcal{F} :

$$\forall I \subset \{1, \dots, n\}, \quad \text{rg}(v_i)_{i \in I} = d - \dim \bigcap_{i \in I} \mathcal{H}_i,$$

avec la convention $\bigcap_{i \in \emptyset} \mathcal{H}_i = V$. Rappelons que le polynôme caractéristique réduit $\bar{\chi}_M(q)$ est obtenu en divisant par $q-1$ le polynôme caractéristique $\chi_M(q)$. Cette opération algébrique possède une incarnation géométrique : la *projectivisation* de la famille \mathcal{F} . On peut décrire simplement cette dernière en termes affines de la manière suivante. Quitte à faire un changement linéaire de coordonnées, on peut toujours supposer que l'hyperplan d'équation $x_d = 0$ est en position générique par rapport à la famille \mathcal{F} , ce qui signifie

$$\forall I \subset \{1, \dots, n\}, \quad \bigcap_{i \in I} \mathcal{H}_i \subset \{x_d = 0\} \iff \bigcap_{i \in I} \mathcal{H}_i = \{0\}.$$

On considère alors la famille, aussi appelée *arrangement*, d'hyperplans affines $F = \{H_1, \dots, H_n\}$ où $H_i = \mathcal{H}_i \cap \{x_d = 1\}$. En d'autres termes, si \mathcal{H}_i est

l'hyperplan vectoriel de \mathbb{C}^d correspondant au vecteur $v_i = (a_1, \dots, a_d)$, l'hyperplan affine $H_i \subset \mathbb{C}^{d-1}$ est d'équation

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_{d-1}x_{d-1} = -a_d.$$

Exemple 7. Reprenons l'exemple 1 dans le cas $n = d = 3$, et considérons une base (v_1, v_2, v_3) de \mathbb{C}^3 . À changement de coordonnées près, on peut toujours supposer que

$$v_1 = (1, 0, 0), \quad v_2 = (0, 1, 0), \quad v_3 = (0, 0, 1).$$

Le plan d'équation $x_3 = 0$ est alors un élément de la famille \mathcal{F} , et n'est donc pas en position générique par rapport à \mathcal{F} . Considérons plutôt le changement de coordonnées de \mathbb{C}^3 tel que

$$v_1 = (1, 0, 0), \quad v_2 = (0, 1, 0), \quad v_3 = (1, 1, -1).$$

Le plan d'équation $x_3 = 0$ est maintenant en position générique par rapport à la famille \mathcal{F} , et les droites affines de l'arrangement F sont données dans \mathbb{C}^2 par les équations (voir la figure 3a)

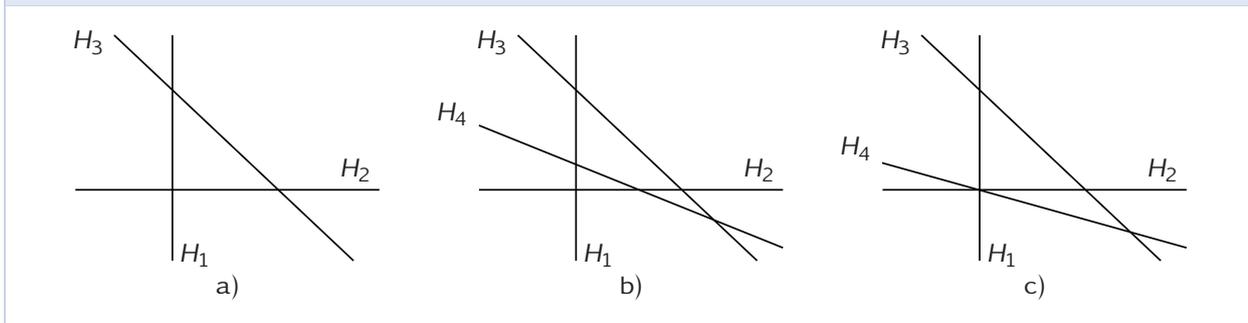
$$H_1 : x_1 = 0 \quad H_2 : x_2 = 0 \quad H_3 : x_1 + x_2 = 1.$$

On voit avec l'exemple précédent qu'un changement de coordonnées linéaire sur \mathbb{C}^d a une influence sur la position précise des hyperplans de F . Cependant les dimensions des intersections des éléments de F sont indépendantes de tels changements de coordonnées génériques. En effet la fonction rang sur la famille de vecteurs E se traduit de nouveau en la fonction codimension sur la famille F , avec maintenant la convention $\dim \emptyset = -1$:

$$\forall I \subset \{1, \dots, n\}, \quad \text{rg}(v_i)_{i \in I} = d - 1 - \dim \bigcap_{i \in I} H_i. \quad (1)$$

Encore une fois, nous ne nous intéresserons donc pas tant ici à la position précise des hyperplans de F , mais plutôt à leurs positions mutuelles données en termes d'intersections à travers la fonction codimension. C'est ce qu'on appelle la *combinatoire* d'un arrangement d'hyperplans.

FIGURE 3 – Droites correspondant aux familles de vecteurs des exemples 1 et 2



Exemple 8. Revenons maintenant à l'exemple 2, et considérons les deux familles de vecteurs

$$E_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, -1), (2, 3, -1)\}$$

et

$$E_2 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, -1), (1, 2, 0)\}.$$

Les droites affines de l'arrangement correspondant sont respectivement données par les équations (voir les figures 3b et 3c) :

$$\begin{aligned} H_1 : x_1 = 0 & & H_2 : x_2 = 0 \\ H_3 : x_1 + x_2 = 1 & & H_4 : 2x_1 + 3x_2 = 1, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} H_1 : x_1 = 0 & & H_2 : x_2 = 0 \\ H_3 : x_1 + x_2 = 1 & & H_4 : x_1 + 2x_2 = 0. \end{aligned}$$

Grâce à la formule (1), on peut lire directement sur les figures 3b et 3c la fonction rg_{E_i} du matroïde associé à la famille de vecteurs E_i :

$$rg_{E_1}(I) = |I| \text{ si } |I| \leq 3 \text{ et } rg_{E_1}(\{1, 2, 3, 4\}) = 3, \text{ et}$$

$$rg_{E_2}(I) = |I| \text{ si } |I| \leq 2, \quad rg_{E_2}(\{1, 2, 4\}) = 2, \\ I \neq \{1, 2, 4\}.$$

Cette représentation géométrique d'une famille de vecteurs et la formule (1) permettent d'extraire d'un cours de géométrie affine élémentaire un exemple de matroïde non linéaire.

Exemple 9. Le théorème de Pappus affirme que les points d'intersection

$$(AB') \cap (A'B), \quad (AC') \cap (A'C), \quad \text{et} \quad (BC') \cap (B'C)$$

sur la figure 4a sont alignés, ou dit autrement sont contenus dans une même droite L . Comme à l'exemple 8, on peut définir à partir de cet arrangement de 9 droites un matroïde linéaire M de rang 3 : les 9 droites constituent les éléments de E , et la fonction rg_M est donnée par leurs intersections via la formule (1). Ainsi par exemple

$$\begin{aligned} rg_M(I) &= |I| \text{ si } |I| \leq 2, \quad rg_M(\{(AB), (AB'), (AC')\}) = 2, \\ rg_M(\{L, (CB'), (BC')\}) &= 2, \\ rg_M(\{(AB'), (CB'), (BC')\}) &= 3. \end{aligned}$$

Considérons maintenant le matroïde \tilde{M} de rang 3 défini sur le même ensemble E et dont la fonction $rg_{\tilde{M}}$ coïncide avec la fonction rg_M sauf pour la valeur suivante² :

$$rg_{\tilde{M}}(\{L, (CB'), (BC')\}) = 3.$$

Cela correspond à considérer l'arrangement de « pseudo-droites » représenté à la figure 4b, obtenu à partir de la figure 4a en faisant éviter le point d'intersection $(BC') \cap (B'C)$ à la droite L . Il découle du théorème de Pappus que le matroïde \tilde{M} ne peut pas être linéaire.

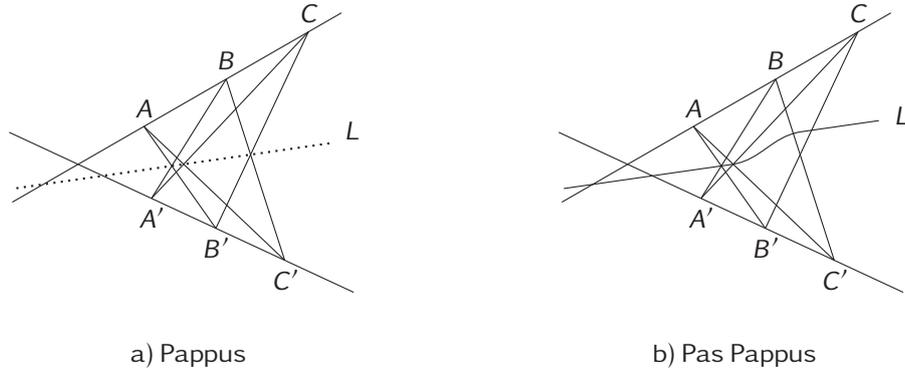
3. Intermezzo : suites log-concaves et formes quadratiques pseudo-lorentziennes

Attardons-nous un instant sur les suite log-concaves à trois termes. On peut reformuler la définition de ln-concavité sous forme matricielle :

$$\forall k = 1, \dots, n-1, \quad \det \begin{pmatrix} a_{k-1} & a_k \\ a_k & a_{k+1} \end{pmatrix} \leq 0,$$

2. On obtient bien ainsi un matroïde par [22, Proposition 1.5.13].

FIGURE 4 – Pas Pappus : un matroïde non linéaire



© Dessin de Matthieu Fiquerez

ou autrement dit la forme quadratique sur \mathbb{R}^2 de matrice $\begin{pmatrix} a_{k-1} & a_k \\ a_k & a_{k+1} \end{pmatrix}$ est indéfinie, ou de manière équivalente *pseudo-lorentzienne*. Une forme quadratique q sur \mathbb{R}^n est dite pseudo-lorentzienne si elle est de signature $(1, r-1)$, c'est-à-dire si elle s'exprime dans un système de coordonnées adéquat par

$$q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_r^2.$$

Si $r = n$, c'est-à-dire si q est non dégénérée, on dit que q est *lorentzienne*. On peut extraire beaucoup de suites log-concaves à 3 termes à partir d'une forme quadratique pseudo-lorentzienne. Si v et w sont deux éléments de \mathbb{R}^n avec $q(v) > 0$, alors la restriction de q au sous-espace vectoriel engendré par v et w est pseudo-lorentzienne à son tour³. Ainsi, en notant ϕ la forme polaire de q , on a :

$$\det \begin{pmatrix} q(v) & \phi(v, w) \\ \phi(v, w) & q(w) \end{pmatrix} \leq 0.$$

En d'autres termes la suite $q(v), \phi(v, w), q(w)$ est ln-concave.

Qui produit des formes quadratiques pseudo-lorentziennes produit donc des suites log-concaves. La géométrie algébrique, à travers le théorème de l'indice de Hodge, est justement une fantastique usine à formes lorentziennes.

4. La géométrie algébrique fait son entrée

3. Sinon elle serait définie positive contredisant ainsi la signature de q .

4. Adresser toute réclamation directement à Hermann Weyl : « Mon travail a toujours cherché à concilier vérité et beauté, mais lorsque j'avais à choisir entre l'une et l'autre, généralement je préfère la beauté. »

4.1 – Géométrie algébrique condensée

Une *variété algébrique affine* est⁴ l'ensemble des solutions dans \mathbb{C}^n d'un système d'équations

$$\begin{cases} P_1(z_1, \dots, z_n) = 0 \\ P_2(z_1, \dots, z_n) = 0 \\ \vdots \\ P_k(z_1, \dots, z_n) = 0 \end{cases}$$

où les P_i sont des polynômes à coefficients complexes en n variables. Une telle variété a une dimension (complexe) : une droite est de dimension 1, un plan de dimension 2, une surface de dimension 2, etc.

Mise en garde. Il convient en vérité de distinguer les variétés non singulières (sympathiques) des variétés singulières (plus sauvages), mais nous ferons fi de cette distinction ici. En première approximation, toute variété algébrique sera non singulière. Dans le même ordre d'idée le principe du maximum implique que les variétés algébriques affines ont le même défaut de compacité que \mathbb{C}^d , ce qui n'est pas toujours pratique. L'espace projectif $\mathbb{C}P^d$, obtenu en ajoutant un hyperplan à l'infini à \mathbb{C}^d , offre une compactification de \mathbb{C}^d pour laquelle la compactification des variétés algébriques affines se comporte bien. La compactification dans $\mathbb{C}P^d$ d'une variété algébrique affine est appelée une *variété algébrique projective*, et dans ce texte toute les variétés algébriques seront supposées projectives et non singulières^a. Le lecteur peu familier avec les espaces projectifs est cependant autorisée à penser en termes de variétés affines, c'est-à-dire à remplacer tous les $\mathbb{C}P$ qui suivent par des \mathbb{C} .

a. Pire encore, nous n'autorisons même pas le remplacement de \mathbb{C} par un autre corps.

En ajoutant des équations au système définissant une variété algébrique X , on obtient des *sous-variétés algébriques* de X . Il se trouve que les intersections de ces sous-variétés algébriques obéissent à des contraintes très fortes. Le théorème de l'indice de Hodge pour les surfaces en est le premier exemple. À une surface algébrique S est associé un couple $(A^1(S), \circ)$, où $A^1(S)$ est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'une forme bilinéaire symétrique \circ vérifiant :

1. chaque courbe algébrique C de S détermine un élément $[C]$ de $A^1(S)$;
2. $A^1(S)$ est engendré par les courbes algébriques de S ;
3. si C_1 et C_2 sont deux courbes algébriques de S s'intersectant en k points, alors $[C_1] \circ [C_2] = k$.

La forme bilinéaire symétrique \circ s'appelle la *forme d'intersection* de S .

Exemple 10. Si $S = \mathbb{C}P^2$ (rappelez-vous l'autorisation de penser $S = \mathbb{C}^2$), alors $A^1(S) = \mathbb{R}$ et \circ est la multiplication usuelle. Une courbe C de S est dite de degré p si elle est définie par l'équation

$$P(z_1, z_2) = 0$$

où le polynôme $P(z_1, z_2)$ est de degré p . On a alors $[C] = p$ dans $A^1(S)$. Le point (3) ci-dessus est une reformulation du théorème de Bézout stipulant que deux courbes algébriques planes de degrés respectifs d_1 et d_2 s'intersectent en $d_1 d_2$ points.

Le théorème suivant, dû à Hodge dans les années 1930, est un résultat majeur dans l'étude des surfaces algébriques.

Théorème 3 (Théorème de l'indice de Hodge). *La forme d'intersection d'une surface algébrique est lorentzienne.*

Les surfaces algébriques constituent donc une source formidable de suites log-concaves à trois termes. Par exemple, on peut interpréter la ln-concavité de la suite

$$1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, 2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, 1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

en considérant l'union des trois droites représentée à la figure 3a. Autrement dit, la ln-concavité des coefficients de $\bar{\chi}_{M_3}(q) = (q-1)^2$ s'explique en considérant l'arrangement de trois droites non concurrentes dans $\mathbb{C}P^2$ correspondant à M_3 .

Aparté

pour géomètres algébristes : $2^2 \geq 1 \times 1$.

Soit S l'éclaté de $\mathbb{C}P^2$ en les 3 points d'intersection des droites H_i . On note α le relevé dans le groupe de Chow $A^1(S)$ de la classe d'une droite dans $\mathbb{C}P^2$, et $\beta \in A^1(S)$ la classe telle que $\alpha + \beta$ soit la classe réalisée par l'union des transformées strictes des trois droites et des trois diviseurs exceptionnels. La matrice d'intersection des classes α et β est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

et le théorème de l'indice de Hodge nous assure maintenant que cette matrice est de déterminant négatif.

En adaptant cette stratégie à tous les arrangements de droites dans $\mathbb{C}P^2$, on peut démontrer le théorème 2 pour tout matroïde \mathbb{C} -linéaire de rang 3. Plus généralement, la preuve du théorème 2 dans le cas d'un matroïde \mathbb{C} -linéaire quelconque s'obtient en utilisant la généralisation suivante du théorème de l'indice de Hodge.

De manière similaire au cas des surfaces, on peut associer à toute variété algébrique projective X de dimension d un couple $(A^1(X), \circ)$, où $A^1(X)$ est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'une forme d -linéaire symétrique \circ vérifiant :

1. chaque sous-variété algébrique D de codimension 1 de X détermine un élément $[D]$ de $A^1(X)$;
2. $A^1(X)$ est engendré par les sous-variétés algébriques de codimension 1 de X ;
3. si D_1, \dots, D_d sont d sous-variétés algébriques de codimension 1 de X s'intersectant en k points, alors $[D_1] \circ [D_2] \circ \dots \circ [D_d] = k$.

Le théorème suivant peut se démontrer en se ramenant au cas des surfaces algébriques et en utilisant le théorème de l'indice de Hodge. Étant donné $\alpha \in A^1(X)$, on utilise la notation

$$\alpha^k = \underbrace{\alpha \circ \alpha \circ \dots \circ \alpha}_k.$$

Théorème 4 (Khovanskii-Teissier). *Soit X une variété algébrique de dimension d , et α et β deux éléments sympathiés⁵ de $A^1(X)$. Alors la suite $(\alpha^k \circ \beta^{d-k})_{k=0, \dots, d}$ est log-concave.*

4.2 – Le cas des matroïdes \mathbb{C} -linéaires, esquisse

Nous pouvons maintenant donner les (très) grandes lignes de la preuve du théorème 2 dans le cas d'un matroïde \mathbb{C} -linéaire M . L'idée principale est de considérer non pas l'arrangement d'hyperplans F associé à M décrit à la section 2, mais plutôt son complémentaire

$$X^\circ = \mathbb{C}P^{\text{rg}(M)-1} \setminus \bigcup_{H \in F} H.$$

5. Pour les initiés : les classes α et β doivent être numériquement effectives.

6. Pour les amateurs : la variété X_M est obtenue en éclatant $\mathbb{C}P^{\text{rg}(M)-1}$ le long des intersections des hyperplans de F ; la classe α est le relevé de la classe d'un hyperplan de $\mathbb{C}P^{\text{rg}(M)-1}$, et $\beta = \partial X_M - \alpha$ où ∂X_M est la classe de $X_M \setminus X^\circ$.

C'est une variété algébrique affine clairement non compacte. Toute l'astuce consiste maintenant à choisir une compactification adéquate X_M de X° de telle sorte que la combinatoire de l'arrangement F d'hyperplans se retrouve dans les propriétés de la forme d'intersection sur $A^1(X_M)$. Une telle compactification a été introduite dans les années 1990 par De Concini et Procesi [10], et Huh et Katz ont démontré dans [17] que le k -ième coefficient de $\bar{\chi}_M(q)$ est égal à $\alpha^k \circ \beta^{\text{rg}(M)-1-k}$ pour α et β deux éléments sympathiés⁶ dans $A^1(X_M)$.

Ce travail, faisant suite à un premier travail de Huh [16], démontre ainsi le théorème 2 dans le cas des matroïdes \mathbb{C} -linéaires. Un premier pas remarquable dans la résolution de la conjecture de Heron-Rota-Welsh, près de quarante ans après son énoncé! Il est à noter que la paire $(A^1(X_M), \circ)$ ainsi que les éléments α et β ont une description entièrement combinatoire à partir du matroïde M . Cela amènera Huh et Katz à écrire dans [17] :

Our proof is largely combinatorial except for establishing the Khovanskii-Teissier inequality in Lemma 3.3 [...]. For that reason, we do not know if our proof can be extended to general matroids.

5. La géométrie algébrique fait sa sortie

5.1 – Le cas général, (esquisse)²

Le tour de force qu'ont réussi Adiprasito, Huh et Katz en démontrant les théorèmes 1 et 2 a donc été de se défaire de toute utilisation de la géométrie algébrique pour établir la ln-concavité de la suite $(\alpha^k \circ \beta^{d-k})_{k=0, \dots, d}$. Comme souvent en mathématiques, ils ont pour cela démontré un résultat bien plus fort.

À un matroïde M de rang $d+1$ est associée une algèbre graduée

$$A^*(M) = \bigoplus_{i=0}^d A^i(M),$$

appelée l'anneau de Chow de M . L'adjectif graduée

signifie ici que le produit d'un élément de $A^i(M)$ et d'un élément de $A^j(M)$ est dans $A^{i+j}(M)$, en posant $A^i(M) = \{0\}$ lorsque $i \notin \{0, \dots, d\}$. Ces anneaux ont été introduits par Feichtner et Yuzvinsky dans [12], étendant ainsi à tous les matroïdes les aspects combinatoires des travaux de De Concini et Procesi concernant les compactifications magnifiques des complémentaires d'arrangements d'hyperplans. Ainsi lorsque le matroïde M est \mathbb{C} -linéaire, l'anneau $A^*(M)$ fournit une description combinatoire d'un objet bien connu en géométrie algébrique : l'anneau de Chow de la variété X_M construite par De Concini et Procesi. Ces anneaux de Chow en géométrie algébrique complexe sont connus pour satisfaire à trois propriétés très fortes : la dualité de Poincaré, le théorème de Lefschetz vache, et les relations de Hodge-Riemann.

Le théorème principal d'Adiprasito, Huh et Katz dans [1] stipule que ces trois propriétés continuent d'être vérifiées pour l'anneau de Chow d'un matroïde quelconque. Si on se rappelle qu'une infime proportion des matroïdes sont linéaires, ce résultat est tout simplement fantastique. Une version combinatoire du théorème de Khovanskii-Teissier,

et donc le théorème 2, se déduit maintenant des trois propriétés de dualité de Poincaré, théorème de Lefschetz vache, et relations de Hodge-Riemann.

5.2 – Fil d'Ariane tropical

Bien qu'ayant graduellement disparu de la preuve finale, la géométrie algébrique a donc joué un rôle important dans l'établissement du théorème 2. La réalisation progressive que l'approche de [17] pour les matroïdes \mathbb{C} -linéaires pouvait se généraliser à tout matroïde s'est faite notamment grâce à une autre géométrie, la *géométrie tropicale*. En première approximation, la géométrie tropicale peut se voir comme la géométrie algébrique construite à partir de \mathbb{R} muni des deux opérations suivantes :

$$"x + y" = \max(x, y) \qquad "x \times y" = x + y.$$

Cette algèbre curieuse produit des objets géométriques curieux, appelés variétés tropicales et dont quelques spécimens sont représentés aux figures 5 et 6.

FIGURE 5 – Courbes tropicales planes

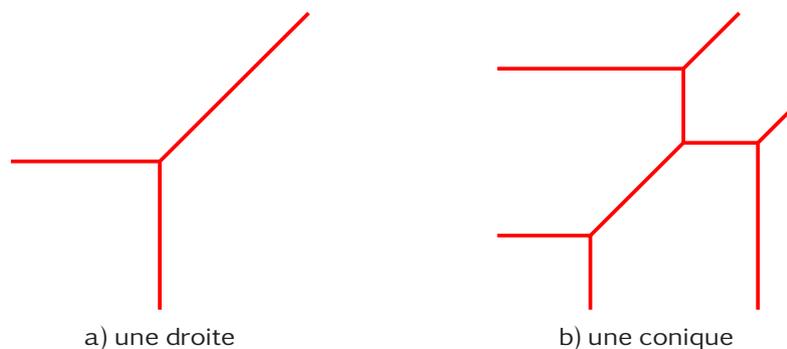
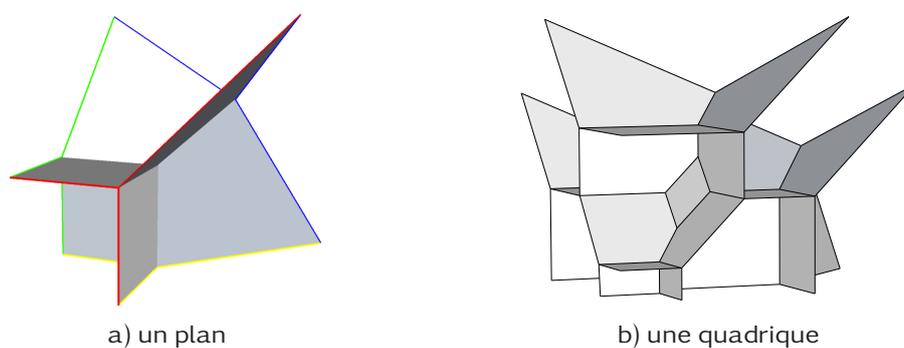


FIGURE 6 – Surfaces tropicales spatiales



© (Dessins de Kris Shaw)

Un théorème de Sturmfels affirme que tout matroïde a une réalisation comme complémentaire d'arrangement d'hyperplans en géométrie tropicale. Ainsi tout matroïde, linéaire ou non, a finalement une incarnation géométrique. La figure 6a est par exemple le pendant tropical du complémentaire de l'arrangement de droites représenté à la figure 3b. Les quatre droites tropicales rouge, verte, bleue et jaune formant le bord du plan tropical correspondent exactement aux quatre droites de la figure 3b. En fournissant un cadre où s'entremêlent géométrie algébrique et combinatoire, la géométrie tropicale procure une intuition géométrique sur des objets combinatoires comme les matroïdes. Et c'est précisément cette intuition qui permet d'entrevoir que l'idée folle que la preuve de [17] puisse se généraliser à tout matroïde, n'est peut-être finalement pas si folle que ça.

5.3 – Bouquet final

Pour les lectrices familiers des dualité de Poincaré, théorème de Lefschetz vache, et autres relations de Hodge-Riemann, terminons en précisant le théorème principal de [1]. Étant donné un endomorphisme linéaire L de $A^*(M)$, on notera $L : A^*(M) \rightarrow A^{*+1}(M)$ si

$$L(A^i(M)) \subset A^{i+1}(M) \quad \forall i \geq 0,$$

et on notera L^k pour la composée k -ième de L . De manière analogue, on notera

$$P : A^*(M) \times A^{d-*}(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

pour une fonction définie sur les couples $(x, y) \in A^i(M) \times A^{d-i}(M)$ pour $i = 0, \dots, d$. On renvoie par exemple à [2, 1] pour la description précise de l'ensemble \mathcal{K} dans le théorème ci-dessous.

Théorème 5 (Adiprasito-Huh-Katz, [1]). *Pour tout matroïde M de rang $d + 1$, il existe une forme bilinéaire symétrique $P : A^*(M) \times A^{d-*}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ et un cône convexe \mathcal{K} d'opérateurs $L : A^*(M) \rightarrow A^{*+1}(M)$ tels que*

1. Dualité de Poincaré : l'appariement

$$P : A^i(M) \times A^{d-i}(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

est non dégénéré pour tout $i = 0, \dots, d$.

2. Théorème de Lefschetz vache : pour tout $L \in \mathcal{K}$ et tout $i = 0, \dots, d$, l'application linéaire

$$L^{d-2i} : A^i(M) \longrightarrow A^{d-i}(M) \\ x \longmapsto L^{d-2i}(x)$$

est un isomorphisme.

3. Relations de Hodge-Riemann : pour tout $L \in \mathcal{K}$ et tout $i = 0, \dots, d$, l'application bilinéaire

$$A^i(M) \times A^i(M) \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto (-1)^i P(x, L^{d-2i}(y))$$

est symétrique, et est définie positive sur le noyau de L^{d-2i+1} .

Comme mentionné plus haut, la théorie de Hodge assure que le théorème 5 est vrai pour les matroïdes \mathbb{C} -linéaires. Que ce théorème persiste pour tout matroïde est remarquable.

6. Et après ?

Outre la conjecture de Heron-Rota-Welsh, June Huh et ses collaborateurs se sont attaqués avec succès à plusieurs conjectures anciennes en théorie des matroïdes. Ainsi, la conjecture de Dowling-Wilson [6], la conjecture forte de Mason [7], ou encore la conjecture de Brylawski-Dawson [5] ont pu être démontrées en utilisant chaque fois une théorie de Hodge combinatoire adéquate. Dans une autre direction, Amini et Piquerez ont généralisé le théorème 5 aux variétés tropicales kähleriennes [3]. Il est frappant que bien que toutes les preuves des conjectures mentionnées soient similaires, aucune preuve unifiée n'est actuellement connue. Pour citer June Huh :

The known proofs of the Poincaré duality, the hard Lefschetz property, and the Hodge-Riemann relations for the objects listed above have certain structural similarities, but there is no known way of deducing one from the others. Could there be a Hodge-theoretic framework general enough to explain this miraculous coincidence ?

La théorie des polynômes lorentziens récemment initiée par Bränden et Huh dans [7], ainsi que les travaux cités d'Amini et Piquerez, ont pour but d'apporter quelques éléments de réponses à cette question. Comme tout résultat fondamental, loin d'être le point final d'une histoire, les travaux de June Huh constituent au contraire le début d'une épopée.

7. Pour quelques détails de plus

Nous n'avons fait qu'éfleurer les travaux de June Huh. Le lecteur désireuse d'aller plus loin pourra consulter les articles de synthèse [2, 21, 4,

11, 14, 15]. Concernant les autres aspects abordés ici, nous renvoyons la lecteur à [22] pour une référence classique sur les matroïdes, à [13] pour une introduction à la géométrie algébrique, à [24] pour un panorama sur la théorie de Hodge, et à [8, 9, 18] pour une introduction à la géométrie tropicale.

Références

- [1] K. ADIPRASITO, J. HUH et E. KATZ. « Hodge theory for combinatorial geometries ». *Ann. of Math. (2)* **188**, n° 2 (2018), p. 381-452.
- [2] K. ADIPRASITO, J. HUH et E. KATZ. « Hodge theory of matroids ». *Notices of the AMS* **64**, n° 1 (2017).
- [3] O. AMINI et M. PIQUEREZ. « Hodge theory for tropical varieties ». *arXiv preprint arXiv:2007.07826* (2020).
- [4] F. ARDILA. « The geometry of geometries : matroid theory, old and new ». *arXiv preprint arXiv:2111.08726* (2021).
- [5] F. ARDILA, G. DENHAM et J. HUH. « Lagrangian combinatorics of matroids ». *arXiv preprint arXiv:2109.11565* (2021).
- [6] T. BRADEN et al. « Singular Hodge theory for combinatorial geometries ». *arXiv preprint arXiv:2010.06088* (2020).
- [7] P. BRÄNDÉN et J. HUH. « Lorentzian polynomials ». *Annals of Mathematics* **192**, n° 3 (2020), p. 821-891.
- [8] E. BRUGALLÉ. « Un peu de géométrie tropicale. » *Quadrature* **74** (2009), p. 10-22.
- [9] E. BRUGALLÉ et al. « Brief introduction to tropical geometry ». In : *Proceedings of the Gökova Geometry-Topology Conference 2014*. Gökova Geometry/Topology Conference (GGT), Gökova, 2015, p. 1-75.
- [10] C. DE CONCINI et C. PROCESI. « Wonderful models of subspace arrangements ». *Selecta Math. (N.S.)* **1**, n° 3 (1995), p. 459-494.
- [11] C. EUR. « An Essence of independence : Recent works of June Huh on combinatorics and Hodge theory ». *arXiv preprint arXiv:2211.05724* (2022).
- [12] E. M. FEICHTNER et S. YUZVINSKY. « Chow rings of toric varieties defined by atomic lattices ». *Invent. Math.* **155**, n° 3 (2004), p. 515-536.
- [13] K. HIRSCH et I. SHAFAREVICH. *Basic algebraic geometry*. Springer Berlin/Heidelberg, 1977.
- [14] J. HUH. « Combinatorial applications of the Hodge–Riemann relations ». In : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians : Rio de Janeiro 2018*. World Scientific, 2018, p. 3093-3111.
- [15] J. HUH. « Combinatorics and Hodge theory ». In : *Proc. Int. Cong. Math.* 2022.
- [16] J. HUH. « Milnor numbers of projective hypersurfaces and the chromatic polynomial of graphs ». *Journal of the American Mathematical Society* **25**, n° 3 (2012), p. 907-927.
- [17] J. HUH et E. KATZ. « Log-concavity of characteristic polynomials and the Bergman fan of matroids ». *Mathematische Annalen* **354** (2012), p. 1103-1116.
- [18] D. MACLAGAN et B. STURMFELS. *Introduction to tropical geometry*. **161**. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015, p. xii+363.
- [19] J. MARCHÉ. « Le nombre d'or et la topologie quantique ». *Gazette de la Société Mathématique de France* **172** (2022), p. 21-29.
- [20] P. NELSON. « Almost all matroids are nonrepresentable ». *Bull. Lond. Math. Soc.* **50**, n° 2 (2018), p. 245-248.
- [21] A. OKOUNKOV. « Combinatorial geometry takes the lead ». *arXiv preprint arXiv:2207.03875* (2022).
- [22] J. OXLEY. *Matroid theory*. Second. **21**. Oxford Graduate Texts in Mathematics. Oxford University Press, Oxford, 2011, p. xiv+684.
- [23] R. P. STANLEY. « Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry ». In : *Graph theory and its applications : East and West (Jinan, 1986)*. Vol. 576. Ann. New York Acad. Sci. New York Acad. Sci., New York, 1989, p. 500-535.
- [24] C. VOISIN. *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*. **10**. Cours Spécialisés [Specialized Courses]. Société Mathématique de France, Paris, 2002, p. viii+595.



Erwan BRUGALLÉ

Nantes Université
erwan.brugalle@math.cnrs.fr

Erwan Brugallé est enseignant-chercheur à Nantes Université. Ses travaux portent essentiellement sur la géométrie algébrique réelle et la géométrie tropicale.

Ce texte reflète ce que j'ai retiré du groupe de travail en théorie de Hodge tropicale à Nantes Université au printemps 2022. Je remercie chaleureusement Hanine Awada, Benoît Bertrand, Vincent Franjou, Gurvan Mével, Matthieu Piquerez et Salim Rivière pour leur participation enthousiaste. Un grand merci aussi à Omid Amini, Yann Chaubet, Anatole Joseph Stouls, Assia Mahboubi, Enzo Pasquereau, Matthieu Piquerez et Gabriel Rivière pour leurs nombreuses remarques sur les versions préliminaires de cet article. La présentation générale du texte doit beaucoup à l'influence de François Laudénbach. Je profite de l'occasion pour le remercier de l'attention constante, toujours bienveillante, qu'il porte à son entourage.