UN PEU DE GÉOMÉTRIE TROPICALE
SOLUTIONS DES EXERCICES

ERWAN BRUGALLÉ

1. Algèbre tropicale

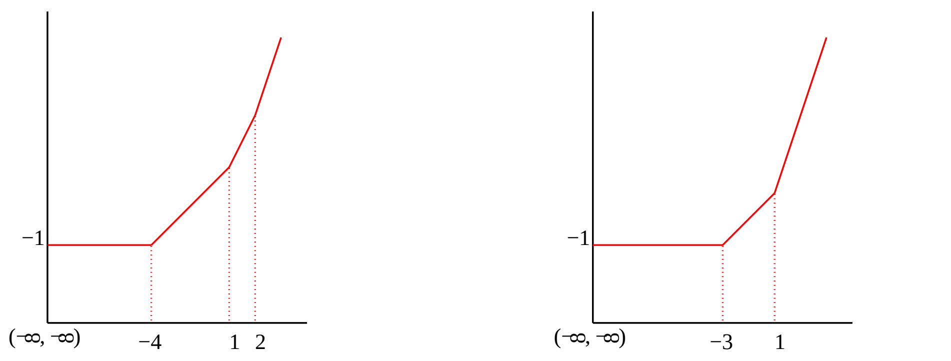
(1) *En quoi le fait que l'addition tropicale soit idempotente empêche-t-il l'existence de symétriques pour cette addition ?*

Soit x dans $\mathbb{T}$ tel qu'il existe y dans $\mathbb{T}$ vérifiant "$x + y$" $= -\infty$. Puisque "$x + x$" $= x$, on a "$x + x + y$" $=$ "$x + y$". Or "$x + y$" $= -\infty$, donc "x" $= -\infty$. Nous avons donc montré que dans tout semi-corps idempotent, seul l'élément neutre de l'addition admet un symétrique.

(2) *Tracer les graphes des polynômes tropicaux $P(x)$ = "$x^3 + 2x^2 + 3x + (-1)$" et $Q(x)$ = "$x^3 + (-2)x^2 + 2x + (-1)$", et déterminer leurs racines tropicales.*

Les graphes des polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ sont représentés à la figure 1. Les racines tropicales de $P(x)$ sont -4, 1 et 2, et les racines tropicales de $Q(x)$ sont -3 et 1, cette dernière étant de multiplicité 2. On a donc les factorisations suivantes :

$$P(x) = \text{“}(x + (-4))(x + 1)(x + 2)\text{”} \qquad Q(x) = \text{“}(x + (-3))(x + 1)^2\text{”}$$



a) $P(x) =$ "$x^3 + 2x^2 + 3x + (-1)$" b) $Q(x) =$ "$x^3 + (-2)x^2 + 2x + (-1)$"

Fig. 1

(3) *Soit a dans $\mathbb{R}$ et b et c dans $\mathbb{T}$. Déterminer les racines des polynômes tropicaux "$ax + b$" et "$ax^2 + bx + c$".*

La racine tropicale de "$ax + b$" est donnée par l'équation

$$a + x = b$$

Date: 19 mai 2009.

qui a pour solution $x_1 = “\frac{b}{a}” = b - a$.

Pour résoudre l'équation du second degré, factorisons d'abord par le terme de degré 2 :

$$“ax^2 + bx + c” = “a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})”$$

Si $“(\frac{b}{a})^2” \leq “\frac{c}{a}”$, nous voyons alors facilement que le monôme $“\frac{b}{a}x”$ n'est jamais dominant, c'est à dire

$$“ax^2 + bx + c” = “a(x^2 + \frac{c}{a})” = “a\left(x + \sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2”$$

Si $“(\frac{b}{a})^2” \geq “\frac{c}{a}”$, alors $“\frac{b}{a}” \geq “\frac{c}{b}”$. Comme $“\frac{c}{a}” = “\frac{b}{a}\frac{c}{b}”$, on a

$$“ax^2 + bx + c” = “a\left(x^2 + \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right)x + \frac{b}{a}\frac{c}{b}\right)” = “a(x + \frac{b}{a})(x + \frac{c}{b})”$$

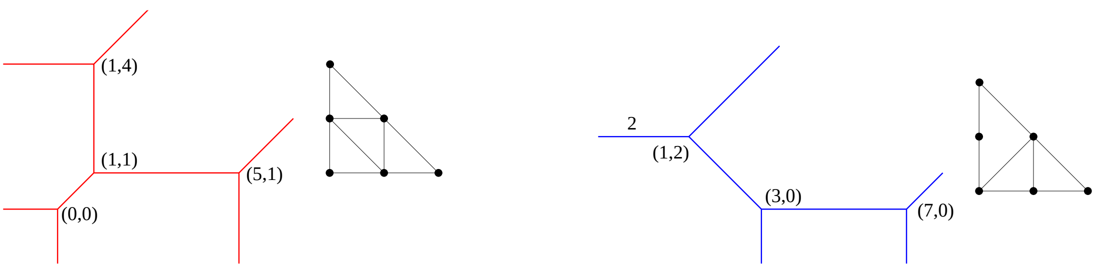
Nous avons donc résolu l'équation tropicale de degré 2 :

- Si $“b^2” \leq “ac”$, alors l'équation $“ax^2 + bx + c”$ a une unique racine tropicale x_1, de poids 2, donnée par
$$x_1 = “\sqrt{\frac{c}{a}}” = \frac{c-a}{2}$$
- Si $“b^2” > “ac”$, alors l'équation $“ax^2 + bx + c”$ a deux racines tropicales x_1 et x_2 de poids 1 données par
$$x_1 = “\frac{b}{a}” = b - a \quad \text{et} \quad x_2 = “\frac{c}{b}” = c - b$$

2. Courbes tropicales

(1) *Dessiner les courbes tropicales définies par les polynômes tropicaux* $P(x,y) = “5 + 5x + 5y + 4xy + 1y^2 + x^2”$ *et* $Q(x,y) = “7 + 4x + y + 4xy + 3y^2 + (-3)x^2”$, *ainsi que leur subdivision duale.*

Les deux courbes et leur subdivision duale sont représentées à la figure 2.



a) $“5 + 5x + 5y + 4xy + 1y^2 + x^2”$ b) $“7 + 4x + y + 4xy + 3y^2 + (-3)x^2”$

Fig. 2

(2) *Un triangle tropical est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ délimité par trois droites tropicales. Quelles sont les formes possibles d'un triangle tropical ?*

Il y a 18 types de triangles tropicaux, représentés sur la figure 3. Attention, malgré les apparences, chacun de ces triangles a exactement 3 côtés et 3 sommets !

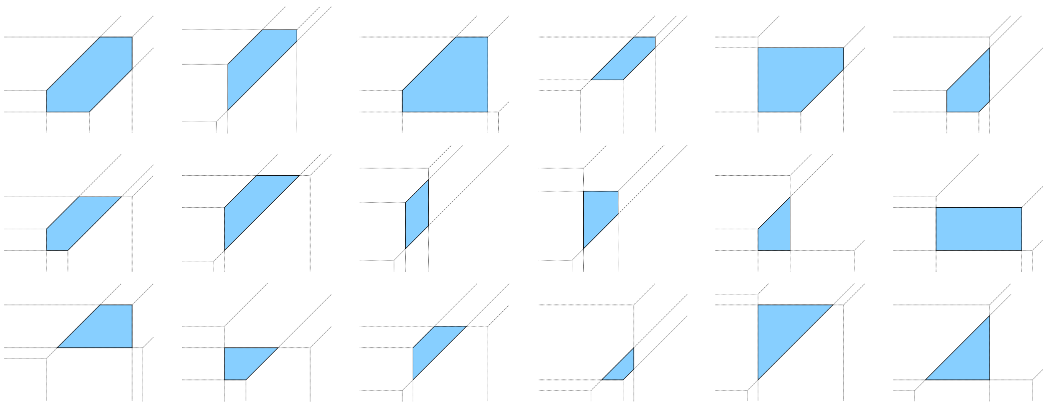


FIG. 3. Triangles tropicaux

(3) *Montrer qu'une courbe tropicale de degré d a au plus d^2 sommets.*

Un triangle dont les trois sommets sont dans $\mathbb{Z}^2$ est d'aire au moins $\frac{1}{2}$. Comme le triangle Δ_d est d'aire $\frac{d^2}{2}$, la subdivision duale à une courbe tropicale de degré d ne peut pas contenir plus de d^2 triangles.

(4) *Trouver une équation pour chacune des courbes tropicale de la figure 4.*

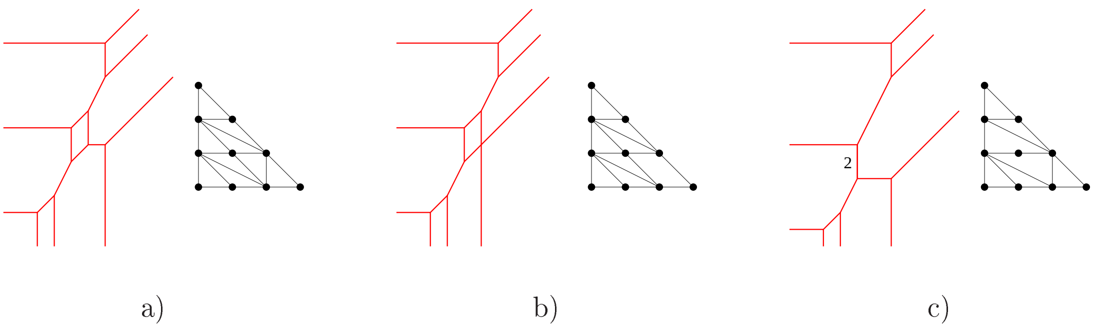


FIG. 4

Nous allons chercher de proche en proche les coefficients des polynômes tropicaux désirés. Pour cela, Nous allons utiliser le fait que si v est un sommet d'une courbe tropicale définie par un polynôme tropical $P(x, y)$, alors la valeur de $P(x, y)$ au voisinage de v est donnée uniquement par les monômes correspondant au polygone dual à v.

Cherchons une équation tropicale $P(x, y)$ de la courbe C représentée à la figure 4a. Nous pouvons choisir que le sommet v_1 le plus haut de C soit de coordonnées $(0, 0)$. Par dualité, on a $P(x,y) = “y^2(ax+by+c)”$ dans un voisinage de v_1, et ce dernier est donné par l'équation $a+x = b+y = c$. Donc $a=b=c$ et nous pouvons choisir $P(x,y) = “y^2(x+y+0)”$ dans un voisinage de v_1.

Soit v_2 le sommet de C le plus haut après v_1. Comme l'arête reliant v_1 et v_2 est verticale, nous pouvons choisir les coordonnées de v_2 égales à $(0,-1)$. Dans un voisinage de v_2, on a $P(x,y) = “y(y+xy+ax^2)”$ et v_2 est donné par l'équation $y = x+y = a+2x$. On a donc $a=-1$, et $P(x,y) = “y(y+xy+(-1)x^2)”$ dans un voisinage de v_2.

Soit v_3 le sommet de C le plus haut après v_1 et v_2. Comme l'arête reliant v_2 et v_3 est de pente 2, nous pouvons choisir les coordonnées de v_3 égales à $(-1,-3)$. Dans un voisinage de v_3, on a $P(x,y) = “y(y+(-1)x^2+ax)”$ et v_3 est donné par l'équation $y = 2x-1 = a+x$. On a donc $a=-2$, et $P(x,y) = “y(y+(-1)x^2+(-2)x)”$ dans un voisinage de v_3.

Nous trouvons ainsi de proche en proche tous les coefficients de $P(x,y)$. Par exemple, une équation possible de la courbe représentée à la figure 4a est

$$“y^3+y^2+y^2x+(-1)yx^2+(-2)yx+(-4)y+(-5)x^2+(-5)x^3+(-8)x+(-12)”$$

De même, les courbes tropicales représentées sur les figures 4b et c sont respectivement données par les polynômes

$$“y^3+y^2+y^2x+(-1)yx^2+(-2)yx+(-4)y+(-4)x^2+(-5)x^3+(-8)x+(-12)”$$

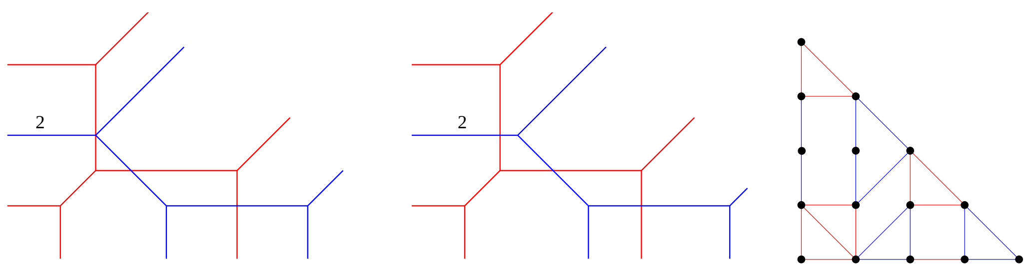
et

$$“y^3+y^2+y^2x+(-1)yx^2+(-4)y+(-5)x^2+(-5)x^3+(-8)x+(-12)”$$

3. Intersection tropicale

(1) *Déterminer les points d'intersection stables des deux courbes tropicales de l'exercice 1 de la partie 2, ainsi que leur multiplicité.*

D'après l'exercice 1 de la partie 2, les points d'intersection stables des deux courbes sont les points $(1,2)$, $(2,1)$ et $(5,0)$ (voir figure 5a). Pour calculer leur multiplicité, translatons un peu la courbe bleue vers la droite. On obtient alors la figure 5b, et la subdivision duale à l'union de ces deux courbes est représentée à la figure 5c. Le point $(1,2)$ est donc de multiplicité 2, et les points $(2,1)$ et $(5,0)$ de multiplicité 1. On retrouve bien que deux coniques se coupent en 4 points.



a) b) c)

Fig. 5

(2) *Un point double d'une courbe tropicale est l'intersection de deux arêtes de celle-ci. Montrer qu'une conique tropicale avec un point double est l'union de deux droites tropicales.*

Soit C une conique tropicale avec un point double p. Notons e_1 et e_2 les arêtes de C telles que $e_1 \cap e_2 = \{p\}$. Soit q un sommet de C, et soit D une droite tropicale passant par p et q (une telle droite existe toujours). Notons e l'arête de D passant par p.

Comme p est le point d'intersection de deux branches distinctes de C, celui-ci est nécessairement un point d'intersection stable de C et D. De plus, comme D passe par q qui est un sommet de C, q est aussi un point d'intersection stable de C et D. D'après le théorème de Bézout, les multiplicités de p et q comme points d'intersection stables de C et D sont nécessairement toutes les deux égales à 1 et C et D n'ont pas d'autre point d'intersection stable. En particulier, e coïncide avec e_1 ou e_2 (supposons e_1) sur un voisinage de p, et D ne passe par aucun sommet de C autre que p et q. On en déduit que l'arête e_1 est alors forcement adjacente à q. On peut alors choisir D de telle manière que q soit aussi le sommet de D, c'est à dire que D est contenue dans C. Ce qui peut encore se réécrire $C = D \cup D'$, avec D' une courbe tropicale de degré $2 - 1 = 1$. La conique tropicale C est donc l'union de deux droites tropicales.

(3) *Montrer qu'une courbe tropicale de degré 3 avec deux points doubles est l'union d'une droite et d'une conique tropicale. Montrer qu'une courbe tropicale de degré 3 avec trois points doubles est l'union de trois droites tropicales.*

Soit C une courbe tropicale de degré 3 avec deux points doubles p et q. Avec un raisonnement similaire à celui de l'exercice précédent, on montre qu'il existe un droite tropicale D passant par p et q et contenue dans C. C'est à dire $C = D \cup C'$ avec C' une conique tropicale.

Si C a trois points doubles, le théorème de Bézout nous assure que seulement deux de ces points doubles sont des points d'intersection stables de D et C'. La conique tropicale C' a donc un point double, et d'après l'exercice précédent, $C' = D' \cup D''$. En conclusion $C = D \cup D' \cup D''$.

5. Patchwork

(1) *Construire une courbe tropicale réelle de degré 2 réalisant le même arrangement qu'une hyperbole dans $\mathbb{R}^2$. Même question avec une parabole. Peut-on construire une courbe tropicale réelle réalisant le même arrangement qu'une ellipse ?*

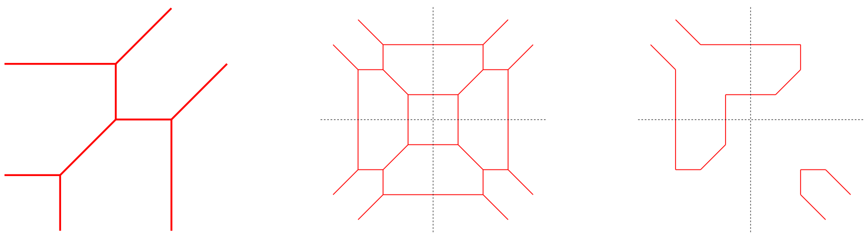


Fig. 6. Patchwork d'une hyperbole

Un patchwork d'hyperbole est représenté à la figure 6, et un patchwork de parabole est représenté à la figure 7. Par construction, une courbe tropicale réelle a *toujours* des arêtes non bornées. En particulier, il n'est pas possible de construire un ellipse avec la version du patchwork présentée dans cet article. Heureusement, il en existe une version plus générale avec laquelle on peut aisément construire des courbes tropicales réelles bornées. Nous renvoyons le lecteur aux références citées dans le texte principal.

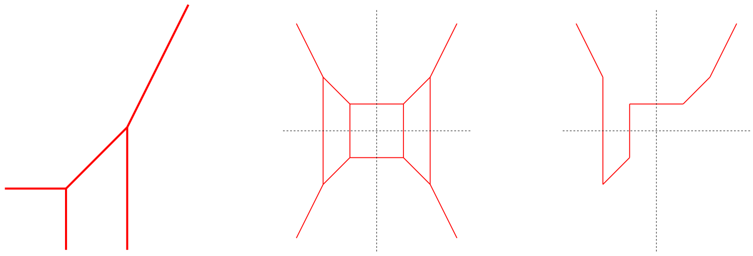
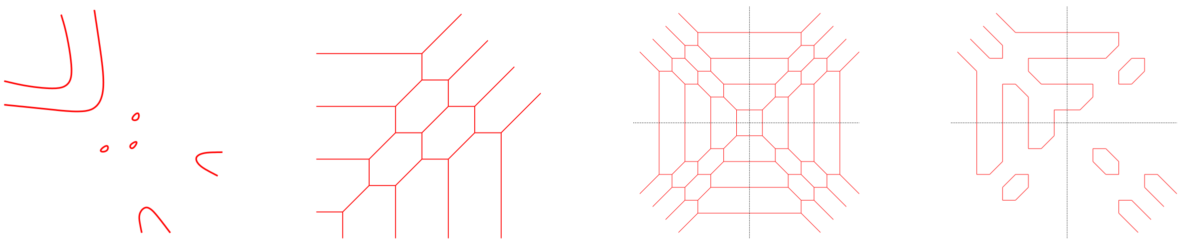


FIG. 7. Patchwork d'une parabole

(2) *À l'aide du patchwork, montrer qu'il existe une courbe algébrique réelle de degré 4 réalisant l'arrangement de la figure 8a.*

Remarquons que la courbe tropicale et la courbe tropicale réelle de degré 3 de la figure 14 du texte principal s'obtiennent en complétant la courbe tropicale et la courbe tropicale réelle de degré 2 de la figure 6. De même, nous pouvons compléter le patchwork représenté à la figure 14 du texte principal pour obtenir une courbe tropicale réelle de degré 4 réalisant l'arrangement désiré. Ce patchwork est représenté à la figure 8.



a) b) c) d)

FIG. 8. Patchwork d'une courbe de degré 4 avec 7 composantes connexes

(3) *Montrer que pour tout degré d, il existe une courbe algébrique réelle plane avec $\frac{d(d-1)+2}{2}$ composantes connexes.*

Pour $d \leq 4$, nous avons déjà construit une courbe tropicale C_d de degré d à partir de laquelle nous avons construit une courbe tropicale réelle $\mathbb{R}C_d$ avec $\frac{d(d-1)+2}{2}$ composantes connexes (voir les figures 6 et 9, ainsi que les figures 13 et 14 du texte principal). De plus, à chaque fois les courbes C_d et $\mathbb{R}C_d$ se construisent à partir des courbes C_{d-1} et $\mathbb{R}C_{d-1}$. Nous allons continuer cette récurrence.

Soit C_1 une droite tropicale, et $\mathbb{R}C_1$ la droite tropicale réelle de la figure 13c du texte principal.

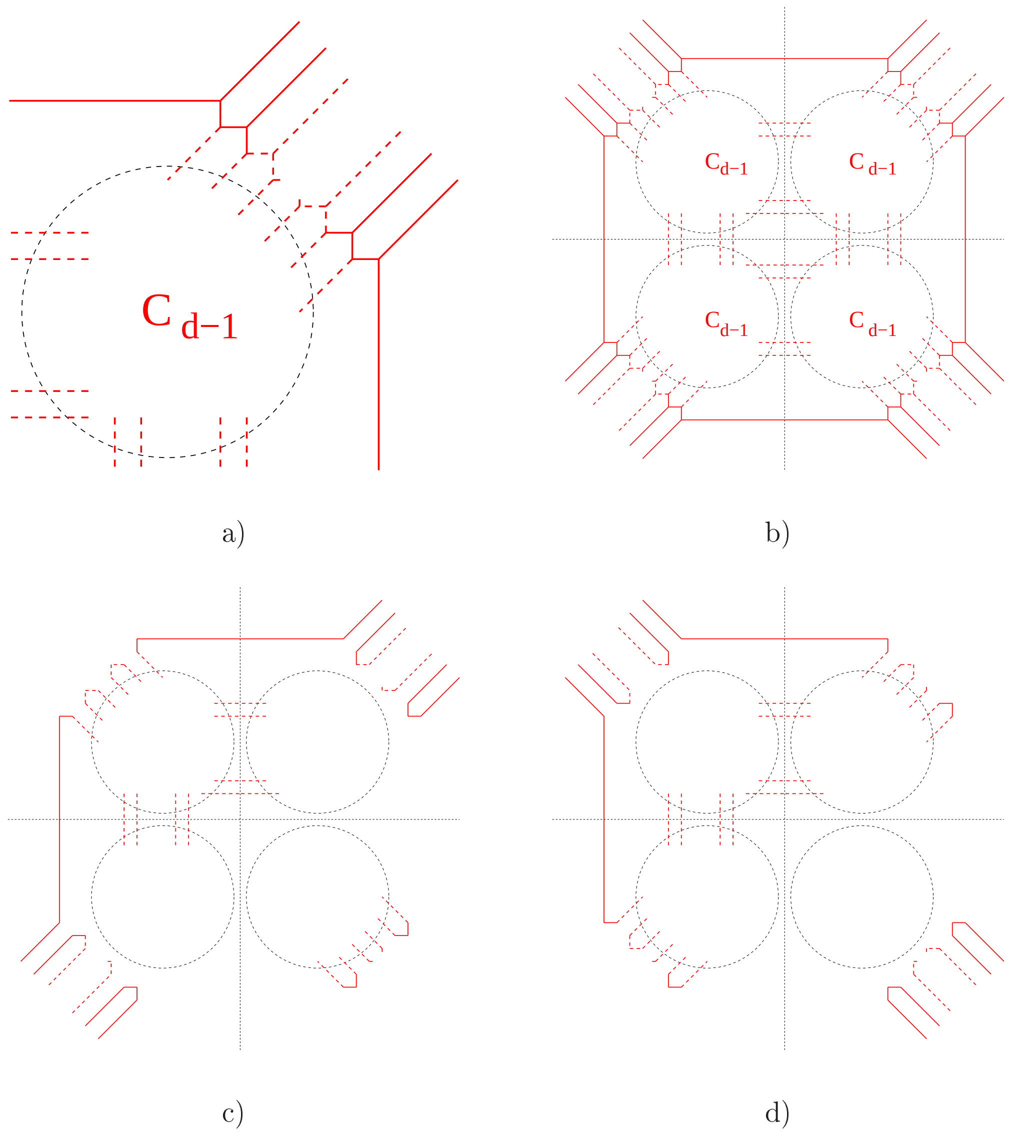


FIG. 9. Patchwork d'une courbe de degré d avec $\frac{d(d-1)+2}{2}$ composantes connexes

Supposons que nous avons construit les courbes C_{d-1} et $\mathbb{R}C_{d-1}$. On construit alors la courbe C_d comme indiqué à la figure 9a, puis la courbe $\mathbb{R}C_d$ comme indiqué à la figure 9c si d est impair, et comme indiqué à la figure 9d si d est pair. On voit alors que $\mathbb{R}C_d$ a $d-1$ composantes connexes de plus que $\mathbb{R}C_{d-1}$. Donc si cette dernière a $\frac{(d-1)(d-2)+2}{2}$ composantes connexes, la courbe tropicale réelle $\mathbb{R}C_d$ a $\frac{d(d-1)+2}{2}$ composantes connexes.

Cette famille de courbes a été construite pour la première fois par Axel Harnack dans la deuxième moitié du XIXème siècle. Il a ainsi montré l'existence de courbes algébriques réelles planes avec le nombre maximal de composantes connexes en tout degré. Bien sûr, Harnack employait des méthodes différentes des nôtres ici, car il n'était pas question de patchwork à l'époque.

Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, 175 rue du Chevaleret, 75 013 Paris, France
E-mail address: brugalle@math.jussieu.fr