

UN PEU DE GÉOMÉTRIE TROPICALE

ERWAN BRUGALLÉ

Quelles figures étranges aux propriétés mystérieuses se cachent derrière ce nom énigmatique de *géométrie tropicale* ? Sous les tropiques comme ailleurs, il est difficile de trouver plus simple qu'une droite. Ce sera notre premier objet d'étude.

Une droite tropicale est formée de 3 demi-droites usuelles de directions $(-1, 0)$, $(0, -1)$ et $(1, 1)$ émanant d'un point quelconque du plan (voir figure 1a). On peut se demander avec raison pourquoi appeler une droite, tropicale ou autre, cet objet bizarroïde... En s'y penchant de plus près, on constate que ces droites tropicales satisfont les mêmes propriétés géométriques de base que les droites "normales" ou "classiques" : deux droites tropicales se coupent en un unique point (voir figure 1b), et deux points du plan définissent une unique droite tropicale (voir figure 1c).

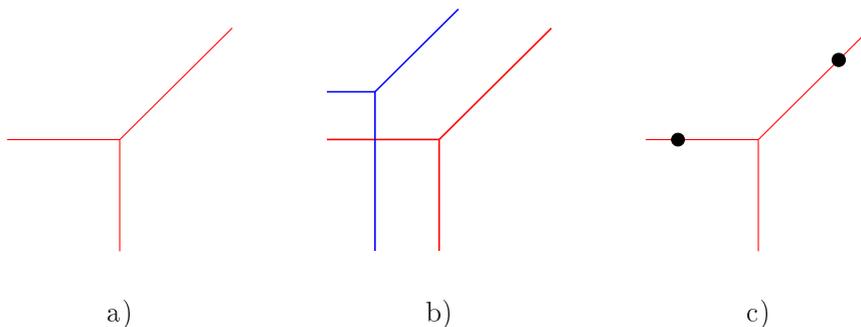


FIG. 1. La droite tropicale

Plus important encore, même si moins visible sur le dessin, droites classiques et tropicales sont toutes deux données par une équation de la forme $ax + by + c = 0$. Dans le cadre de l'algèbre standard, c'est-à-dire en appelant une addition une addition et une multiplication une multiplication, on reconnaît sans peine une droite classique derrière cette équation. Mais dans le monde tropical, additionner veut dire prendre le maximum, multiplier signifie additionner, et tous les objets changent de forme ! Pour dire toute la vérité, même "être égal à 0" prend un autre sens...

Géométries classique et tropicale sont donc élaborées suivant les mêmes principes à partir de deux modes de calcul. Elles sont les visages de deux algèbres différentes.

La géométrie tropicale n'est cependant pas qu'un jeu stérile pour mathématiciens désœuvrés. Le monde classique peut être *dégénéré* jusqu'au monde tropical, et les objets tropicaux conservent alors naturellement certaines propriétés des objets classiques dont ils sont limite. Ainsi, un énoncé tropical a de fortes chances d'avoir un énoncé classique similaire. Or, les objets tropicaux sont linéaires par morceaux et sont donc beaucoup plus simples à étudier que leurs homologues classiques !

On pourrait donc résumer l'approche tropicale par le principe suivant :

Étudier des objets simples, énoncer des théorèmes sur des objets compliqués

Les premières parties de ce texte sont consacrées à l’algèbre tropicale, aux courbes tropicales et à quelques unes de leurs propriétés. Nous expliquons ensuite pourquoi les géométries classique et tropicale sont liées en montrant succinctement comment le monde classique dégénère jusqu’au monde tropical. Puis nous illustrons le principe précédent par la méthode dite du *patchwork* pour construire des courbes algébriques réelles via les *amibes*. Nous terminons ce texte en donnant quelques références bibliographiques.

Mais avant de rentrer dans le vif du sujet, il nous faut expliquer le pourquoi du mot “tropical”. Est-ce dû à la forme exotique des objets considérés ? À la présence d’amibes à squelette ? Avant de parler d’algèbre tropicale, on employait le nom plus prosaïque d’*algèbre max-plus*. En l’honneur des travaux de leur collègue brésilien Imre Simon, des chercheurs en informatique de l’Université Paris 7 décidèrent un jour de troquer “max-plus” pour “tropical”. Laissons le mot de la fin à Wikipedia ¹ sur l’origine du mot “tropical”, *it simply reflects the French view on Brazil*.

1. ALGÈBRE TROPICALE

1.1. Opérations tropicales. L’algèbre tropicale s’obtient en considérant l’ensemble des nombres réels \mathbb{R} et en remplaçant l’addition par le maximum et la multiplication par l’addition. En d’autres termes, on définit deux nouvelles lois sur \mathbb{R} , appelées *addition* et *multiplication tropicales* et notées respectivement “+” et “ \times ”, par

$$“x + y” = \max(x, y) \quad “x \times y” = x + y$$

Dans tout ce texte, les opérations algébriques tropicales sont notées entre guillemets. Comme pour la multiplication classique, nous abrègerons souvent “ $x \times y$ ” en “ xy ”. Familiarisons nous avec ces deux opérations étranges en effectuant quelques calculs simples :

$$“1 + 1” = 1, \quad “1 + 2” = 2, \quad “1 + 2 + 3” = 3, \quad “1 \times 2” = 3, \quad “1 \times (2 + (-1))” = 3,$$

$$“1 \times (-2)” = -1, \quad “(5 + 3)^2” = 10$$

Ces deux lois tropicales ont beaucoup de propriétés en commun avec l’addition et la multiplication classiques. Par exemple, elles sont toutes deux commutatives et la loi “ \times ” est distributive par rapport à la loi “+” (*i.e.* “ $(x+y)z = xz+yz$ ”). Il existe cependant deux différences. Tout d’abord, l’addition tropicale n’a pas d’élément neutre sur \mathbb{R} . Qu’à cela ne tienne, nous pouvons étendre naturellement nos deux opérations tropicales à $-\infty$ par

$$\forall x \in \mathbb{T}, \quad “x + (-\infty)” = \max(x, -\infty) = x \quad \text{et} \quad “x \times (-\infty)” = x + (-\infty) = -\infty$$

où $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est l’ensemble des *nombres tropicaux*. Donc quitte à ajouter $-\infty$ à \mathbb{R} , l’addition tropicale a un élément neutre. En revanche il existe une différence plus importante entre additions tropicale et classique : un élément de \mathbb{R} n’a pas de symétrique pour la loi “+”. Autrement dit, il n’existe pas de soustraction tropicale. De plus, cela ne marche pas cette fois d’ajouter des éléments à \mathbb{T} pour “inventer” des symétriques. En effet “+” est *idempotente*, c’est-à-dire “ $x + x = x$ ” pour tout x dans \mathbb{T} ! Nous n’avons donc pas d’autre choix que de nous accommoder de cette absence de symétriques pour “+”.

Mais mis à part ce dernier point, l’ensemble \mathbb{T} muni des lois “+” et “ \times ” satisfait toutes les autres propriétés d’un corps. Par exemple 0 est l’élément neutre de la multiplication tropicale, et tout élément x de \mathbb{T} différent de $-\infty$ a pour inverse “ $\frac{1}{x}$ ” = $-x$. On dit que \mathbb{T} est un *semi-corps*.

Attention à ne pas aller trop vite dans l’écriture de formules tropicales ! Ainsi, “ $2x$ ” \neq “ $x + x$ ” mais “ $2x$ ” = $x + 2$, de même “ $1x$ ” \neq x mais “ $1x$ ” = $x + 1$, ou encore “ $0x$ ” = x et “ $(-1)x$ ” = $x - 1$.

¹15 mars 2009.

1.2. Polynômes tropicaux. Après avoir défini l'addition et la multiplication tropicales, nous arrivons naturellement à considérer des fonctions de la forme $P(x) = \max_{i=0}^d a_i x^i$ avec les a_i dans \mathbb{T} , c'est-à-dire des polynômes tropicaux². En réécrivant $P(x)$ avec les notations classiques, on obtient $P(x) = \max_{i=1}^d (a_i + ix)$. Voici quelques exemples de polynômes tropicaux :

$$\begin{aligned} \text{"}x\text{"} &= x, & \text{"}1 + x\text{"} &= \max(1, x), & \text{"}1 + x + 3x^2\text{"} &= \max(1, x, 2x + 3), \\ \text{"}1 + x + 3x^2 + (-2)x^3\text{"} &= \max(1, x, 2x + 3, 3x - 2) \end{aligned}$$

Déterminons maintenant les racines d'un polynôme tropical. Mais avant tout, qu'est ce qu'une racine tropicale? Nous rencontrons alors un problème récurrent en mathématiques tropicales : une notion classique a souvent plusieurs définitions équivalentes qui ne le sont plus dans le monde tropical. Chaque définition d'un même objet classique produit alors potentiellement autant d'objets tropicaux différents.

La première définition d'une racine d'un polynôme classique $P(x)$ est un élément x_0 tel que $P(x_0) = 0$. Si on calque cette définition en algèbre tropicale, on cherche alors les éléments x_0 dans \mathbb{T} tels que $P(x_0) = -\infty$. Or, si a_0 est le terme constant du polynôme $P(x)$ alors $P(x) \geq a_0$ pour tout x dans \mathbb{T} . Donc si $a_0 \neq -\infty$, le polynôme $P(x)$ n'a pas de racine... Cette définition n'est pas très satisfaisante.

Alternativement, x_0 est une racine classique du polynôme $P(x)$ si il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x - x_0)Q(x)$. Nous allons voir maintenant que cette définition est la bonne en algèbre tropicale. Pour le comprendre, adoptons un point de vue géométrique sur le problème. Un polynôme tropical est une fonction affine par morceaux (voir figure 2), et nous appelons *racines tropicales* du polynôme $P(x)$ tout point x_0 de \mathbb{T} pour lesquels le graphe de $P(x)$ a un coin en x_0 . De plus la différence des deux pentes adjacentes à une racine tropicale correspond à l'ordre de cette racine. Ainsi, le polynôme " $0 + x$ " a pour racine simple 0, le polynôme " $0 + x + (-1)x^2$ " a pour racines simples 0 et 1, et le polynôme " $0 + x^2$ " a pour racine double 0.

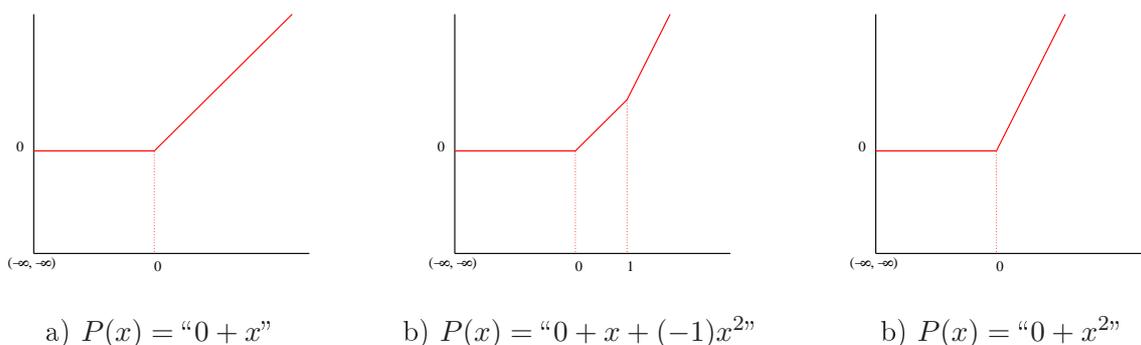


FIG. 2. Exemples de graphe de polynômes tropicaux

Les racines tropicales du polynôme $P(x) = \max_{i=0}^d a_i x^i = \max_{i=1}^d (a_i + ix)$ sont donc exactement les nombres tropicaux x_0 pour lesquels il existe $i \neq j$ tels que $P(x_0) = a_i + ix_0 = a_j + jx_0$. On dit que le maximum de $P(x)$ est atteint deux fois (au moins) en x_0 . Dans ce cas, l'ordre de x_0 est le maximum de $|i - j|$ pour tous les i et j possibles qui réalisent ce maximum. Par exemple, le maximum de $P(x) = \text{"}0 + x + x^2\text{"}$ est atteint 3 fois en 0 et l'ordre de cette racine est 2. De manière équivalente, x_0 est une racine tropicale d'ordre k de $P(x)$ si il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = \text{"}(x + x_0)^k Q(x)\text{"}$. Notons que le facteur $x - x_0$ en algèbre classique s'est transformé en le facteur " $x + x_0$ ", puisque la racine du polynôme " $x + x_0$ " est x_0 et non pas $-x_0$.

²Nous considérons en fait les fonctions polynomiales plutôt que les polynômes.

Cette définition de racine tropicale a l'air nettement plus satisfaisante que la première. De fait, on a la proposition suivante.

Proposition 1.1. *Le semi-corps tropical est algébriquement clos, c'est-à-dire que tout polynôme tropical de degré d a exactement d racines tropicales comptées avec leur multiplicité.*

Par exemple, on a les factorisations suivantes³ :

$$"0 + x + (-1)x^2" = "(-1)(x + 0)(x + 1)" \quad \text{et} \quad "0 + x^2" = "(x + 0)^2"$$

1.3. Exercices.

- (1) *En quoi le fait que l'addition tropicale soit idempotente empêche-t-il l'existence de symétriques pour cette addition ?*
- (2) *Tracer les graphes des polynômes tropicaux $P(x) = "x^3 + 2x^2 + 3x + (-1)"$ et $Q(x) = "x^3 + (-2)x^2 + 2x + (-1)"$, et déterminer leurs racines tropicales.*
- (3) *Soit a dans \mathbb{R} et b et c dans \mathbb{T} . Déterminer les racines des polynômes tropicaux " $ax + b$ " et " $ax^2 + bx + c$ ".*

2. COURBES TROPICALES

2.1. Définition. N'ayons peur de rien, augmentons le nombre de variables de nos polynômes. Un polynôme tropical en deux variables s'écrit $P(x, y) = "\sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j"$, ou encore $P(x, y) = \max_{i,j} (a_{i,j} + ix + jy)$ en notations classiques. Ainsi $P(x, y)$ est encore une fonction affine par morceaux, et la *courbe tropicale* C définie par $P(x, y)$ est le lieu des coins de cette fonction. Autrement dit, C est constituée des points (x_0, y_0) de \mathbb{T}^2 pour lesquels le maximum de $P(x, y)$ est atteint au moins deux fois en (x_0, y_0) .

Avouons tout de suite que nous nous contenterons dans ce texte d'étudier les courbes tropicales dans \mathbb{R}^2 au lieu de \mathbb{T}^2 . Cela n'entame en rien la généralité de ce qui est discuté ici, en revanche les définitions, les énoncés et les dessins deviennent plus simples et compréhensibles.

Regardons la droite tropicale définie par le polynôme $P(x, y) = "\frac{1}{2} + 2x + (-5)y"$. Il faut donc chercher les points (x_0, y_0) dans \mathbb{R}^2 qui vérifient l'un des trois systèmes suivant :

$$2 + x_0 = \frac{1}{2} \geq -5 + y_0, \quad -5 + y_0 = \frac{1}{2} \geq 2 + x_0, \quad 2 + x_0 = -5 + y_0 \geq \frac{1}{2}$$

Notre droite tropicale est donc constituée des trois demi-droites $\{(-\frac{3}{2}, y) \mid y \leq \frac{11}{2}\}$, $\{(x, \frac{11}{2}) \mid x \leq -\frac{3}{2}\}$, et $\{(x, x + 7) \mid x \geq -\frac{3}{2}\}$ (voir la figure 3a).

Il nous manque encore une donnée pour définir rigoureusement une courbe tropicale. Le lieu des coins d'un polynôme tropical de deux variables est constitué de segments et de demi-droites, appelés *arêtes*, qui s'intersectent en des points, appelés *sommets*. Comme dans le cas des polynômes en une variable, nous devons prendre en compte pour chaque arête la différence de pente de $P(x, y)$ des deux côtés de cette arête. On arrive ainsi à la définition formelle suivante.

Définition 2.1. *Soit $P(x, y) = "\sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j"$ un polynôme tropical. La courbe tropicale C définie par $P(x, y)$ est l'ensemble des points (x_0, y_0) de \mathbb{R}^2 tels qu'il existe $(i, j) \neq (k, l)$ vérifiant $P(x_0, y_0) = a_{i,j} + ix_0 + jy_0 = a_{k,l} + kx_0 + ly_0$.*

Étant donné une arête de C , on définit le poids de cette arête comme le maximum des pgcd des nombres $|i - k|$ et $|j - l|$ pour tous les couples (i, j) et (k, l) correspondant à cette arête.

³Encore une fois, ces égalités sont vraies au niveau des fonctions polynomiales, pas au niveau des polynômes! Ainsi, " $0 + x^2$ " et " $(0 + x)^2$ " sont égales comme fonctions polynomiales mais pas comme polynômes.

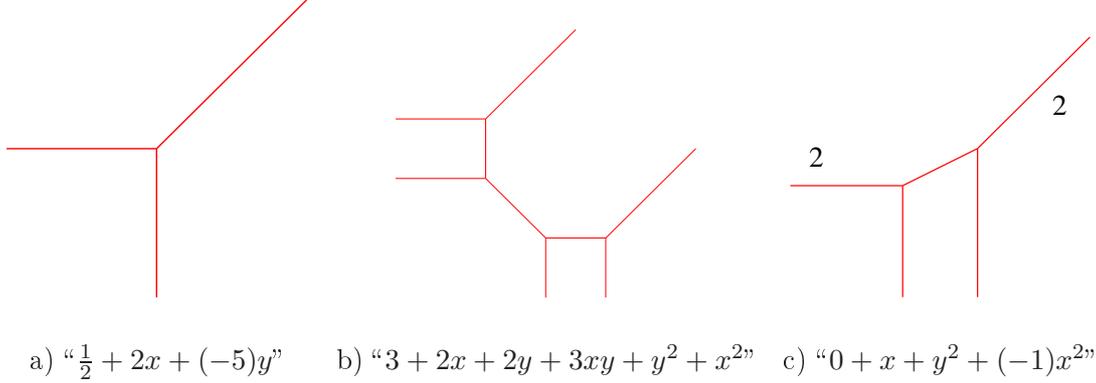


FIG. 3. Quelques courbes tropicales

Dans les dessins, on n'écrira le poids d'une arête près de celle-ci seulement si le poids est au moins 2. Dans le cas de la droite tropicale, toutes les arêtes sont de poids 1, donc la figure 3a représente bien une droite tropicale. Deux exemples de courbes tropicales de degré 2 sont représentés sur les figures 3b et c. La conique tropicale de la figure 3c a deux arêtes de poids 2.

2.2. Subdivision duale. Un polynôme tropical $P(x, y)$ est donc donné par le maximum d'un nombre fini de fonctions affines qui sont les monômes de $P(x, y)$. De plus les points du plan pour lesquels au moins deux des monômes réalisent ce maximum sont précisément les points de la courbe tropicale C définie par $P(x, y)$. Affinons un peu cette étude et pour chaque point (x_0, y_0) de C , considérons *tous* les monômes de $P(x, y)$ qui réalisent ce maximum en (x_0, y_0) .

Étudions tout d'abord le cas de la droite tropicale C définie par $P(x, y) = \frac{1}{2} + 2x + (-5)y$ (voir figure 3a). Au point $(-\frac{3}{2}, \frac{11}{2})$, le sommet de la droite, les trois monômes $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}x^0y^0$, $2x = 2x^1y^0$ et $(-5)y = (-5)x^0y^1$ ont la même valeur. Les exposants de ces monômes, c'est-à-dire les points $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$, définissent un triangle Δ_1 (voir figure 4a). Le long de l'arête horizontale de C , la valeur du polynôme $P(x, y)$ est donnée par les monômes 0 et y , c'est-à-dire par les monômes d'exposants $(0, 0)$ et $(0, 1)$. Le segment défini par ces deux exposants est donc l'arête verticale du triangle Δ_1 . De même, les monômes donnant la valeur de $P(x, y)$ le long de l'arête verticale (respectivement de pente 1) de C sont d'exposants $(0, 0)$ et $(1, 0)$ (respectivement $(1, 0)$ et $(0, 1)$) et le segment défini par ces exposants est l'arête horizontale (respectivement de pente -1) du triangle Δ_1 .

Que retenir de ce petit exercice ? En regardant les monômes donnant la valeur du polynôme tropical $P(x, y)$ en un point de la droite tropicale C , on s'aperçoit que le sommet de C correspond au triangle Δ_1 et que chaque arête e de C correspond à une arête de Δ_1 dont la direction est perpendiculaire à celle de e .

Regardons maintenant la conique tropicale définie par le polynôme $P(x, y) = 3 + 2x + 2y + 3xy + x^2 + y^2$ représentée à la figure 3b. Cette courbe a pour sommets les quatre points $(-1, 1)$, $(-1, 2)$, $(1, -1)$ et $(2, -1)$. En chacun de ces sommets (x_0, y_0) , la valeur du polynôme $P(x, y)$ est donnée par trois monômes :

$$P(-1, 1) = 3 = y_0 + 2 = x_0 + y_0 + 3$$

$$P(-1, 2) = y_0 + 2 = x_0 + y_0 + 3 = 2y_0$$

$$P(1, -1) = 3 = x_0 + 2 = x_0 + y_0 + 3$$

$$P(2, -1) = x_0 + 2 = x_0 + y_0 + 3 = 2x_0$$

Ainsi pour chaque sommet de C , les exposants des trois monômes correspondant définissent un triangle, et ces quatre triangles sont disposés comme sur la figure 4b. De plus comme dans le cas de la droite, pour chaque arête e de C , les exposants des monômes donnant la valeur de $P(x, y)$

le long de e définissent une arête d'un (ou deux) de ces triangles, et la direction de cette arête est perpendiculaire à celle de e .

Expliquons maintenant ce phénomène en toute généralité. Soit $P(x, y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j$ un polynôme tropical quelconque. Le *degré* de $P(x, y)$ est le maximum des sommes $i + j$ pour les coefficients $a_{i,j}$ différents de $-\infty$. Par simplicité, tous les polynômes de degré d considérés dans ce texte vérifient $a_{0,0} \neq -\infty$, $a_{d,0} \neq -\infty$ et $a_{0,d} \neq -\infty$. Ainsi, l'enveloppe convexe des points (i, j) tels que $a_{i,j} \neq -\infty$ est le triangle Δ_d de sommets $(0, 0)$, $(d, 0)$ et $(0, d)$.

Si $v = (x_0, y_0)$ est un sommet de C , alors l'enveloppe convexe des points (i, j) dans $\Delta_d \cap \mathbb{Z}^2$ tels que $P(x_0, y_0) = a_{i,j} + ix_0 + jy_0$ est un polygone Δ_v inclus dans Δ_d . De même, si (x_0, y_0) est un point à l'intérieur d'une arête e de C , alors l'enveloppe convexe des points (i, j) dans $\Delta_d \cap \mathbb{Z}^2$ tels que $P(x_0, y_0) = a_{i,j} + ix_0 + jy_0$ est un segment δ_e inclus dans Δ_d . Comme le polynôme tropical $P(x, y)$ est une fonction convexe affine par morceaux, l'union des Δ_v forme une *subdivision* de Δ_d . En d'autres termes l'union des polygones Δ_v est égale au triangle Δ_d , et deux polygones Δ_v et $\Delta_{v'}$ ont soit une arête commune, soit un sommet commun, soit ne s'intersectent pas. De plus, si e est une arête de C adjacente au sommet v , alors δ_e est une arête de Δ_v , et les directions de e et de δ_e sont perpendiculaires. Cette subdivision de Δ_d est appelée la *subdivision duale* à C .

Par exemple, les subdivisions duales aux courbes tropicales de la figure 3 sont dessinées à la figure 4 (les points noirs représentent les points à coordonnées entières, et ne sont pas nécessairement des sommets de la subdivision).

Remarquons que e est une arête de poids w de C si et seulement si le segment δ_e contient $w + 1$ points dans \mathbb{Z}^2 . Ainsi, le degré d'une courbe tropicale peut se lire directement sur la courbe : c'est la somme des poids des arêtes infinies dans la direction $(-1, 0)$ (ou $(0, -1)$, ou encore $(1, 1)$). De plus, une courbe tropicale est donnée par sa subdivision duale, à translation et longueur des arêtes près.

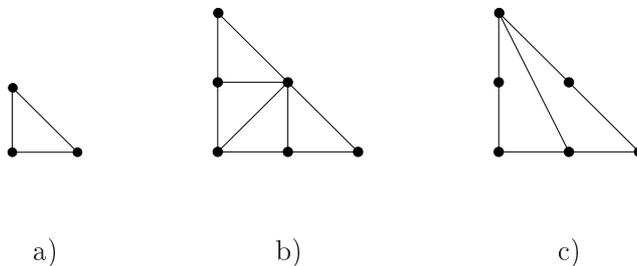


FIG. 4. Quelques subdivisions duales

2.3. Graphes équilibrés et courbes tropicales. La première conséquence de cette dualité est qu'une certaine équation, appelée *relation d'équilibre*, est vérifiée en chacun des sommets d'une courbe tropicale. Soit v un sommet de C adjacent aux arêtes e_1, \dots, e_k de poids respectivement w_1, \dots, w_k . Comme e_i est supportée par une droite (au sens usuel) d'équation à coefficients entières, il existe un unique vecteur entier $\vec{v}_i = (\alpha, \beta)$ sur e_i avec $\text{pgcd}(\alpha, \beta) = 1$ et d'origine le sommet v (voir figure 5a). D'après la partie précédente, le polygone Δ_v dual à v se déduit immédiatement des vecteurs $w_1 \vec{v}_1, \dots, w_k \vec{v}_k$: si on oriente le bord de Δ_v dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, alors chaque arête δ_{e_i} de Δ_v duale à e_i est obtenue à partir du vecteur $w_i \vec{v}_i$ par une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ (voir figure 5b).

Puisque Δ_v est fermé, on lit alors immédiatement sur ce dernier la relation d'équilibre suivante :

$$\sum_{i=1}^k w_i \vec{v}_i = 0$$



FIG. 5. Relation d'équilibre

Un graphe dans \mathbb{R}^2 qui vérifie la relation d'équilibre en chacun des ces sommets est appelé un *graphe équilibré*. Nous venons donc de voir que toute courbe tropicale est un graphe équilibré. Il se trouve que la réciproque est vraie.

Théoreme 2.2. *Les courbes tropicales dans \mathbb{R}^2 sont exactement les graphes équilibrés.*

Ainsi, on peut affirmer qu'il existe des polynômes tropicaux de degré 3 dont les courbes tropicales sont les graphes équilibrés représentés à la figure 6. Nous avons aussi représenté dans chaque cas la subdivision de Δ_3 duale à la courbe.

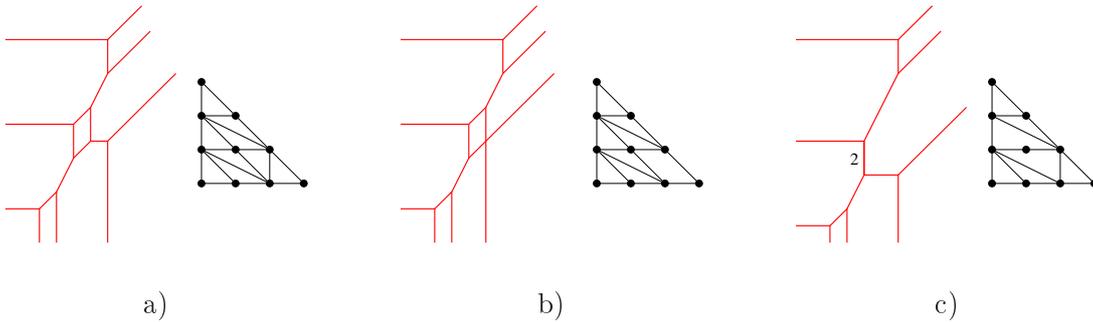


FIG. 6

2.4. Exercices.

- (1) Dessiner les courbes tropicales définies par les polynômes tropicaux $P(x, y) = "5 + 5x + 5y + 4xy + 1y^2 + x^2"$ et $Q(x, y) = "7 + 4x + y + 4xy + 3y^2 + (-3)x^2"$, ainsi que leur subdivision duale.
- (2) Un triangle tropical est un domaine borné de \mathbb{R}^2 délimité par trois droites tropicales. Quelles sont les formes possibles d'un triangle tropical ?
- (3) Montrer qu'une courbe tropicale de degré d a au plus d^2 sommets.
- (4) Trouver une équation pour chacune des courbes tropicales de la figure 6. Le rappel suivant peut être utile : si v est un sommet d'une courbe tropicale définie par un polynôme tropical $P(x, y)$, alors la valeur de $P(x, y)$ au voisinage de v est donnée uniquement par les monômes correspondant au polygone dual à v .

3. INTERSECTION TROPICALE

3.1. Théorème de Bézout. Un grand intérêt de la géométrie tropicale est de fournir un modèle simple de la géométrie algébrique. Par exemple, les théorèmes de base sur l'intersection de courbes tropicales nécessitent un bagage algébrique nettement moins important que leurs homologues classiques. Nous allons illustrer ce principe avec le théorème de Bézout qui affirme que deux courbes algébriques planes de degré d_1 et d_2 se coupent en d_1d_2 points⁴. Avant le cas général, regardons d'abord les droites et les coniques tropicales.

Sauf accident, deux droites tropicales se coupent en un seul point (voir figure 7a), comme en géométrie classique. Maintenant, une droite et une conique tropicales se coupent-elles en deux points ? Si on compte naïvement le nombre de points d'intersection, la réponse est : des fois oui (figure 7b) des fois non (figure 7c)...

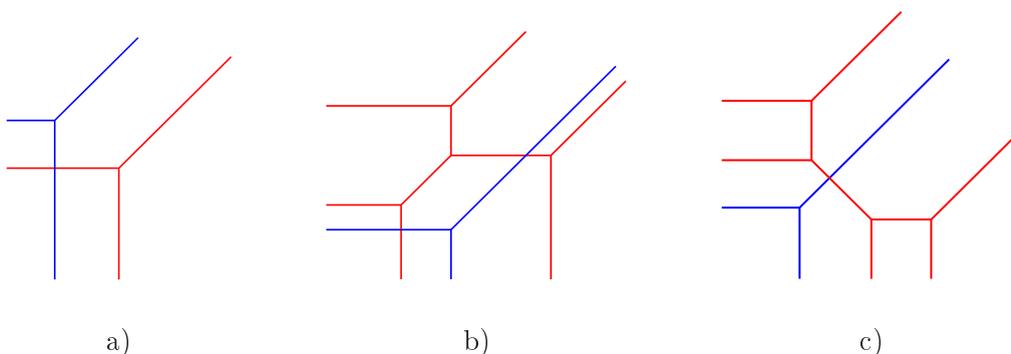


FIG. 7. Intersections de droites et de coniques tropicales

En fait, l'unique point d'intersection de la conique et de la droite tropicales sur la figure 7c, doit être compté 2 fois. Mais pourquoi 2 ici et 1 dans les cas précédents ? La réponse se trouve dans la subdivision duale à l'union des deux courbes.

Remarquons tout d'abord que l'union de deux courbes tropicales C_1 et C_2 est encore une courbe tropicale. En effet, on vérifie aisément que l'union de deux graphes équilibrés est encore un graphe équilibré, mais on peut aussi voir que si les courbes tropicales C_1 et C_2 sont respectivement définies par les polynômes tropicaux $P_1(x, y)$ et $P_2(x, y)$, alors le polynôme $Q(x, y) = \min(P_1(x, y), P_2(x, y))$ définit précisément la courbe $C_1 \cup C_2$. De plus, le degré de $C_1 \cup C_2$ est la somme des degrés de C_1 et de C_2 . Ainsi, cela a bien un sens de parler de la subdivision duale à la courbe $C_1 \cup C_2$.

Les subdivisions duales à l'union des courbes C_1 et C_2 dans chacun des cas de la figure 7 sont représentées sur la figure 8. À chaque fois les sommets de $C_1 \cup C_2$ sont les sommets de C_1 , les sommets de C_2 , et les points d'intersection de C_1 et C_2 . De plus comme chaque point de $C_1 \cap C_2$ est l'intersection d'une arête de C_1 et d'une arête de C_2 , le polygone dual à un tel sommet de $C_1 \cup C_2$ est un parallélogramme. Pour rendre la figure 8 plus transparente, nous avons dessiné chaque arête de la subdivision duale de la même couleur que son arête duale. Nous constatons alors que sur les figures 8a et b, les parallélogrammes correspondant sont d'aire 1, alors que le parallélogramme de la subdivision de la figure 8c est d'aire 2 ! Ainsi, il semble que l'on doive compter chaque point d'intersection avec la multiplicité définie ci-dessous.

Définition 3.1. Soit C_1 et C_2 deux courbes tropicales s'intersectant en un nombre fini de points et en dehors des sommets des deux courbes, et soit p un point d'intersection de C_1 et C_2 . La multiplicité

⁴Attention, ceci est un théorème de géométrie projective ! Par exemple, deux droites affines peuvent être parallèles...

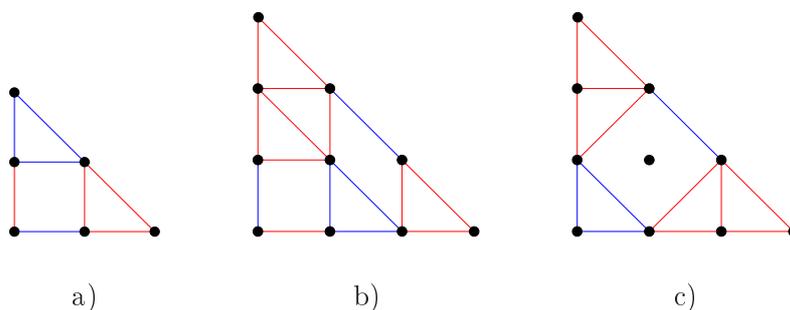


FIG. 8. Subdivisions duales à l'union des courbes de la figure 7

tropicale de p comme point d'intersection de C_1 et C_2 est l'aire du parallélogramme dual à p dans la subdivision duale à $C_1 \cup C_2$.

Avec cette définition, démontrer le théorème de Bézout tropical est un jeu d'enfant.

Théorème 3.2. Soit C_1 et C_2 deux courbes tropicales de degré d_1 et d_2 s'intersectant en un nombre fini de points et en dehors des sommets des deux courbes. Alors la somme des multiplicités tropicales des points d'intersection de C_1 et C_2 est égale à $d_1 d_2$.

Démonstration. Notons s cette somme. Il existe trois types de polygones dans la subdivision duale à la courbe tropicale $C_1 \cup C_2$:

- ceux duaux à un sommet de C_1 . La somme de leur aire est égale à l'aire de Δ_{d_1} , c'est-à-dire $\frac{d_1^2}{2}$.
- ceux duaux à un sommet de C_2 . La somme de leur aire est égale à $\frac{d_2^2}{2}$.
- ceux duaux à un point d'intersection de C_1 et C_2 . La somme de leur aire est égale à s .

Puisque la courbe $C_1 \cup C_2$ est de degré $d_1 + d_2$, la somme de l'aire de tous ces polygones est égale à l'aire de $\Delta_{d_1+d_2}$, c'est-à-dire $\frac{(d_1+d_2)^2}{2}$ et donc

$$s = \frac{(d_1 + d_2)^2 - d_1^2 - d_2^2}{2} = d_1 d_2$$

□

3.2. Intersection stable. Nous avons considéré jusqu'ici uniquement des courbes tropicales s'intersectant "gentiment", c'est-à-dire en un nombre fini de points et en dehors des sommets. Mais que peut-on dire dans les deux cas représentés sur les figures 9a (deux droites tropicales s'intersectant le long d'une arête) et b (une droite passant par le sommet d'une conique) ? Heureusement, nous avons plus d'un tour tropical dans notre poche.

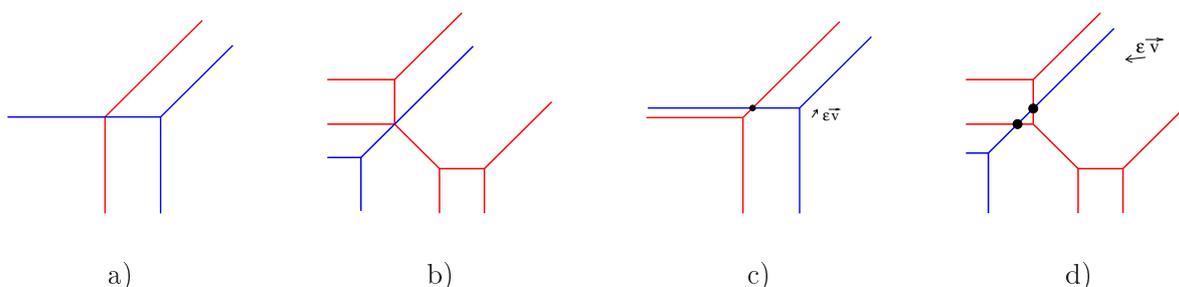


FIG. 9. Intersections non-transverses et translation

Soit ε un petit nombre réel et \vec{v} un vecteur dont le rapport des deux coordonnées est un nombre irrationnel. Si on translate dans chaque cas une des deux courbes du vecteur $\varepsilon\vec{v}$, on se retrouve alors dans le cas d'une intersection gentille (voir figures 9c et d). Évidemment nos nouveaux points d'intersection dépendent du vecteur $\varepsilon\vec{v}$. En revanche la limite de ces points lorsque ε tend vers 0 ne dépend pas de \vec{v} , ce sont les *points d'intersection stables* des deux courbes. Leur multiplicité est égale à la somme des multiplicités des points d'intersection dont ils sont limite.

Par exemple, le point d'intersection stable des deux droites de la figure 9a est le sommet de la droite de gauche, de multiplicité 1. Nos deux droites tropicales se coupent bien en un point. Le point d'intersection stable des deux courbes de la figure 9b est le sommet de la conique, de multiplicité 2.

Notons que l'intersection stable de deux courbes tropicales est concentrée aux points d'intersection isolés et aux sommets des deux courbes. Grâce à l'intersection stable, nous pouvons supprimer du Théorème de Bézout tropical les hypothèses de bonne position des deux courbes.

Théorème 3.3. *Soit C_1 et C_2 deux courbes tropicales de degré d_1 et d_2 . Alors la somme des multiplicités des points d'intersection stables de C_1 et C_2 est égale à d_1d_2 .*

Nous découvrons au passage un phénomène tropical surprenant : une courbe tropicale a une *auto-intersection* bien définie⁵ ! En effet il suffit simplement de considérer l'intersection stable de cette courbe tropicale avec elle même. D'après ce qui précède, cette auto-intersection est concentrée aux sommets de la courbe (voir figure 10).

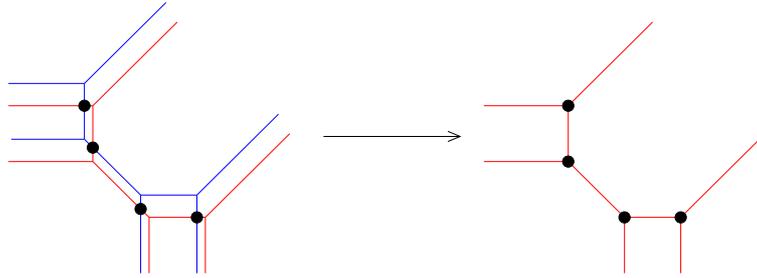


FIG. 10. 4 points d'auto-intersection d'une conique tropicale

3.3. Exercices.

- (1) Déterminer les points d'intersection stables des deux courbes tropicales de l'exercice 1 de la partie 2, ainsi que leur multiplicité.
- (2) Un point double d'une courbe tropicale est l'intersection de deux arêtes de celle-ci. Montrer qu'une conique tropicale avec un point double est l'union de deux droites tropicales. On pourra considérer une droite passant par le point double et un autre sommet de la conique.
- (3) Montrer qu'une courbe tropicale de degré 3 avec deux points doubles est l'union d'une droite et d'une conique tropicale. Montrer qu'une courbe tropicale de degré 3 avec trois points doubles est l'union de trois droites tropicales.

4. QUELQUES EXPLICATIONS

Arrêtons nous quelques instants dans l'étude de la géométrie tropicale proprement dite, et donnons quelques raisons du lien très fort entre géométrie classique et géométrie tropicale. Notre but est d'illustrer en particulier le fait que la géométrie tropicale est une limite de la géométrie classique. Pour

⁵En géométrie algébrique classique, seul le nombre de points d'auto-intersection d'une courbe plane est défini, pas leur position sur la courbe. Une droite s'auto-intersecte en 1 point, mais ce n'est pas clair quel est ce point...

résumer grossièrement le contenu de cette partie, la géométrie tropicale est l'image de la géométrie classique par le logarithme en base ∞ .

4.1. Déquantification de Maslov. Expliquons d'abord comment le semi-corps tropical arrive naturellement comme limite de semi-corps classiques. Ce processus, étudié par Victor Maslov et ses collaborateurs à partir des années 90, s'appelle la *déquantification des nombres réels*.

Un semi-corps bien connu est $(\mathbb{R}_+, +, \times)$, l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls muni de l'addition et de la multiplication classiques. Si t est un nombre strictement positif, alors le logarithme en base t fournit une bijection entre \mathbb{R}_+ et \mathbb{T} , et cette bijection induit une structure de semi-corps sur \mathbb{T} où les opérations, notées " $+_t$ " et " \times_t ", sont données par :

$$"x +_t y" = \log_t(t^x + t^y) \quad \text{et} \quad "x \times_t y" = \log_t(t^x t^y) = x + y$$

On voit donc déjà apparaître l'addition classique comme une multiplication exotique sur \mathbb{T} . Notons que par construction, tous les semi-corps $(\mathbb{T}, "+_t", "\times_t")$ sont isomorphes à $(\mathbb{R}_+, +, \times)$. L'inégalité triviale $\max(x, y) \leq x + y \leq 2 \max(x, y)$ sur \mathbb{R}_+ combinée à la croissance de la fonction logarithme nous donne l'encadrement suivant :

$$\forall t > 0, \quad \max(x, y) \leq "x \times_t y" \leq \max(x, y) + \log_t 2$$

Lorsque t tend vers l'infini $\log_t 2$ tend vers 0, et la loi " $+_t$ " tend donc vers l'addition tropicale " $+$ " ! Ainsi, le semi-corps tropical arrive naturellement comme dégénérescence du semi-corps classique $(\mathbb{R}_+, +, \times)$. Ou encore, on peut voir le semi-corps classique $(\mathbb{R}_+, +, \times)$ comme une déformation du semi-corps tropical, d'où le terme de "déquantification".

4.2. Déquantification d'une droite du plan. Appliquons un raisonnement similaire avec la droite d'équation $x - y + 1$ dans le plan \mathbb{R}^2 (voir figure 11a). Replions tout d'abord les 4 quadrants sur le quadrant positif par l'application valeur absolue (voir figure 11b). L'image par le logarithme en base t de cette droite repliée dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$ ressemble au dessin de la figure 11c. Par définition, prendre le logarithme en base t revient à prendre le logarithme népérien puis à appliquer une homothétie de rapport $\frac{1}{\ln t}$. Ainsi, lorsque t augmente, l'image par le logarithme en base t de la valeur absolue de notre droite se concentre sur un voisinage de l'origine et des 3 directions asymptotiques (voir figures 11c, d et e). Et lorsqu'on fait tendre t vers l'infini, on voit apparaître sur la figure 11f... une droite tropicale !

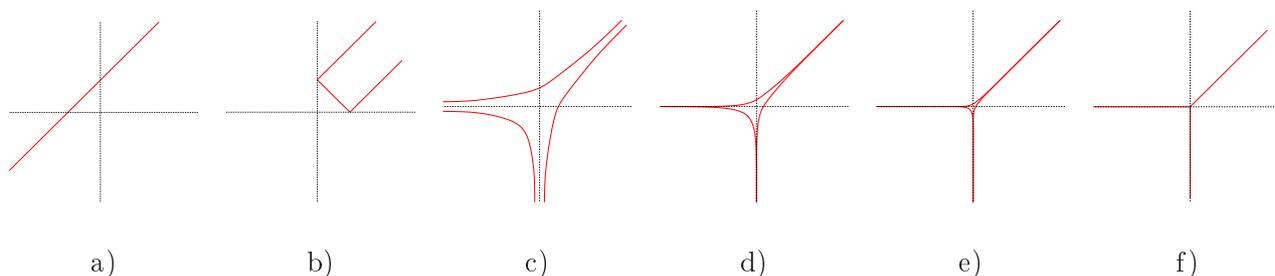


FIG. 11. Déquantification d'une droite

5. PATCHWORK

La figure 11 lue de gauche à droite nous explique comment partir d'une droite classique dans le plan pour arriver à une droite tropicale. La lecture de cette figure de droite à gauche est en fait beaucoup plus intéressante ! En effet, nous voyons ainsi comment construire une droite classique à partir d'une droite tropicale. La technique dite du *patchwork* est une généralisation de cette observation. En

particulier, elle fournit un procédé purement combinatoire de construction de courbes algébriques réelles à partir des courbes tropicales. Mais avant d'expliquer cette méthode en détail, remontons un peu dans le passé.

5.1. Le 16ème problème de Hilbert. Une *courbe algébrique réelle plane* est une courbe du plan \mathbb{R}^2 définie par une équation de la forme $P(x, y) = 0$ où $P(x, y)$ est un polynôme à coefficients réels. Les courbes algébriques réelles de degré 1 et 2 sont simples et bien connues, ce sont les droites et les coniques. À mesure que le degré de $P(x, y)$ augmente, le dessin réalisé par la courbe d'équation $P(x, y) = 0$ peut être de plus en plus complexe. Pour s'en convaincre, il suffit de jeter un œil à la figure 12 où sont représentés une partie des dessins possibles réalisés par une courbe algébrique réelle de degré 4.

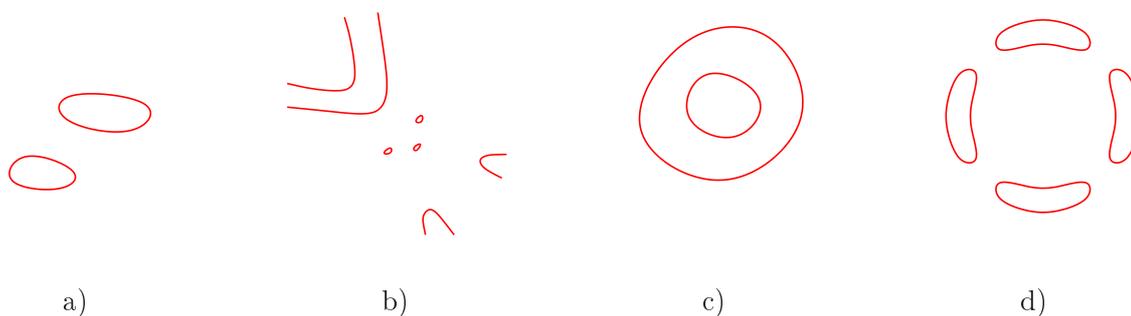


FIG. 12. Quelques courbes algébriques réelles de degré 4

Un théorème dû à Axel Harnack à la fin du XIXème siècle affirme qu'une courbe algébrique réelle plane de degré d a au maximum $\frac{d(d-1)+2}{2}$ composantes connexes. Mais comment ces composantes peuvent-elles se situer les unes par rapport aux autres ? On appelle *arrangement* d'une courbe algébrique réelle plane la position relative de ses composantes connexes dans le plan. Autrement dit, on ne s'intéresse pas à la position exacte de la courbe dans le plan, mais seulement au dessin qu'elle réalise. Par exemple si une courbe a deux composantes connexes bornées, on se préoccupe uniquement de savoir si ces composantes sont en dehors l'une de l'autre (voir figure 12a) ou pas (voir figure 12c). Lors du deuxième congrès international de mathématiques à Paris en 1900, David Hilbert énonça sa célèbre liste de 23 problèmes pour le XXème siècle, et la première partie de son 16ème problème peut être compris dans sa forme (très) étendue comme suit :

Étant donné un entier d , établir la liste des arrangements possibles des courbes algébriques réelles de degré d .

À l'époque de Hilbert, la réponse était connue pour les courbes de degré au plus 4. Malgré des avancées spectaculaire dans ce problème au XXème siècle, dues en particulier à des mathématiciens de l'école russe, de nombreuses questions restent toujours sans réponses⁶...

5.2. Courbes réelles et courbes tropicales. C'est en général un problème difficile de construire une courbe algébrique réelle d'un degré donné réalisant un arrangement donné. Depuis plus d'un siècle, les mathématiciens ont proposé de nombreuses et ingénieuses méthodes pour cela. Le patchwork inventée par Oleg Viro dans les années 70 est une des méthodes actuelle les plus puissantes. À cette époque la géométrie tropicale n'existait pas encore, et Viro énonça son théorème dans un langage différent du notre ici. Cependant il réalisa à la fin des années 90 que le patchwork pouvait

⁶Un problème plus raisonnable et naturel consiste à regarder les arrangements des composantes connexes des courbes algébriques réelles projectives non-singulières. Pour ce problème plus restreint, la réponse est actuellement connue jusqu'en degré 7. C'est un théorème d'Oleg Viro, et le patchwork est un outil essentiel de sa démonstration.

être interprété comme une *quantification* des courbes tropicales. Le patchwork, c'est donc lire la figure 11 de droite à gauche au lieu de gauche à droite. Grâce à cette interprétation nouvelle, Grigory Mikhalkin généralisa peu après la méthode de Viro originelle. Nous donnons ici une version simplifiée du patchwork, le lecteur intéressé trouvera une version plus complète dans les références indiquées à la partie 6.

Dans la suite, si a et b sont deux nombres entiers nous notons $s_{a,b} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la composée de a symétries par rapport à l'axe des abscisses suivies de b symétries par rapport à l'axe de ordonnées. Ainsi seules les valeurs modulo 2 de a et b sont importantes, et $s_{0,0}$ est l'identité, $s_{1,0}$ est la symétrie par rapport à l'axe des abscisses, $s_{0,1}$ est la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées et $s_{1,1}$ est la symétrie par rapport à l'origine.

Expliquons maintenant en détail la procédure de patchwork. Prenons une courbe tropicale C de degré d n'ayant que des arêtes de poids impair et dont tous les polygones de la subdivision duale sont des triangles. Par exemple choisissons la droite tropicale de la figure 13a. Pour chaque arête e de C , choisissons un vecteur $\vec{v}_e = (\alpha_e, \beta_e)$ directeur de e avec α_e et β_e deux entiers premiers entre eux. Pour la droite tropicale, choisissons les vecteurs $(1, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 1)$. Considérons maintenant que le \mathbb{R}^2 dans lequel vit notre courbe tropicale est en fait le quadrant positif $(\mathbb{R}_+^*)^2$ de \mathbb{R}^2 , et prenons l'union de notre courbe tropicale avec ses copies symétriques par rapport aux axes. Dans le cas de la droite tropicale, nous obtenons alors la figure 13b. Pour chaque arête e de notre courbe, effaçons e' et e'' deux des quatre copies symétriques de e suivant les deux règles suivantes :

- $e' = s_{\alpha_e, \beta_e}(e'')$,
- pour chaque sommet v de C adjacent aux arêtes e_1, e_2 et e_3 et pour chaque couple $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ dans $\{0, 1\}^2$, exactement une ou trois des copies $s_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(e_1)$, $s_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(e_2)$ et $s_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(e_3)$ sont effacées.

Appelons le résultat une *courbe tropicale réelle*. Par exemple si C est une droite tropicale, il est possible d'effacer six des copies symétriques des arêtes de C suivant ces deux règles afin d'obtenir la droite tropicale réelle représentée à la figure 13c. Si cette courbe tropicale réelle n'est certes pas une droite, elle réalise quand même le même arrangement qu'une droite classique dans \mathbb{R}^2 (voir figure 13d) !

Il ne s'agit pas là d'un hasard, mais d'un théorème.

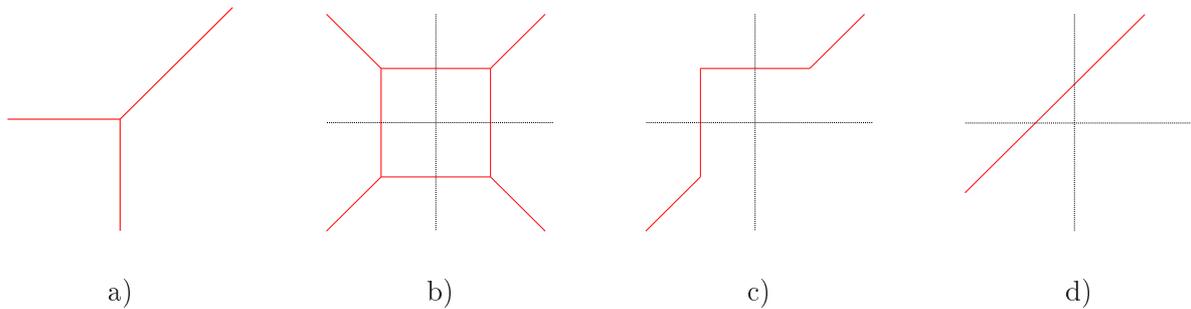


FIG. 13. Patchwork d'une droite

Théorème 5.1 (O. Viro). *Toute courbe tropicale réelle de degré d réalise le même arrangement qu'une courbe algébrique réelle de degré d .*

Insistons sur la beauté et la profondeur d'un tel énoncé ! En effet, une courbe tropicale réelle se construit suivant des règles du jeu combinatoires, et cela ressemble fort à un tour de magie d'affirmer qu'elle puisse avoir un rapport quelconque avec une courbe algébrique réelle ! Nous ne le ferons pas ici, mais le théorème de Viro nous permet même de déterminer l'équation d'une courbe algébrique réelle réalisant le même arrangement qu'une courbe tropicale réelle donnée. Utilisons maintenant ce

théorème pour montrer l'existence de deux courbes algébriques réelles, une de degré 3 et l'autre de degré 6.

Tout d'abord, considérons la courbe tropicale de degré 3 représentée à la figure 14a. Pour un choix convenable d'arêtes à effacer, les figures 14b et c représentent les deux étapes de la procédure de patchwork. On a donc prouvé l'existence d'une courbe algébrique réelle de degré 3 ressemblant au dessin de la figure 14d.

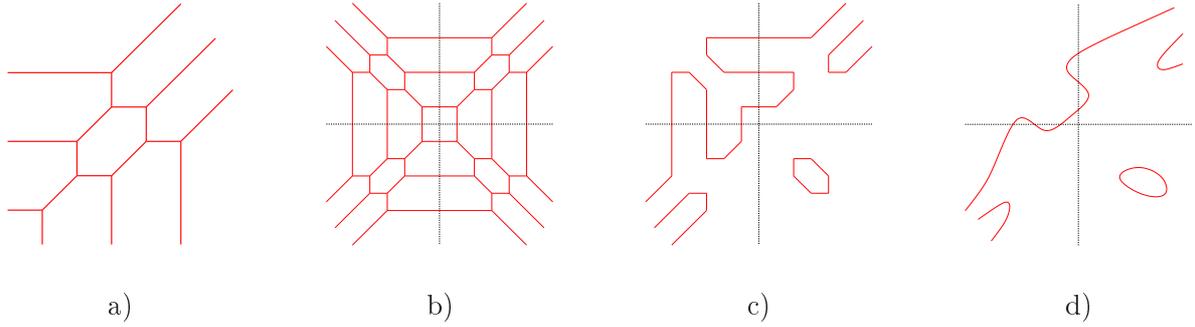


FIG. 14. Patchwork d'une cubique

Pour finir, considérons la courbe tropicale de degré 6 représentée à la figure 15a. Pour un choix convenable d'arêtes à effacer, la procédure de patchwork donne la courbe de la figure 15c. Une courbe algébrique réelle de degré 6 réalisant le même arrangement que cette courbe tropicale réelle a été initialement construite par Gudkov, par des moyens beaucoup plus compliqués, dans les années 60. Pour la petite histoire, Hilbert affirmait en 1900 qu'une telle courbe ne pouvait pas exister...

5.3. Amibes. Si la déquantification d'une droite est l'idée qui sous-tend le patchwork dans toute sa généralité, la preuve du théorème de Viro est un peu plus technique à écrire rigoureusement. Contentons nous d'en esquisser les contours.

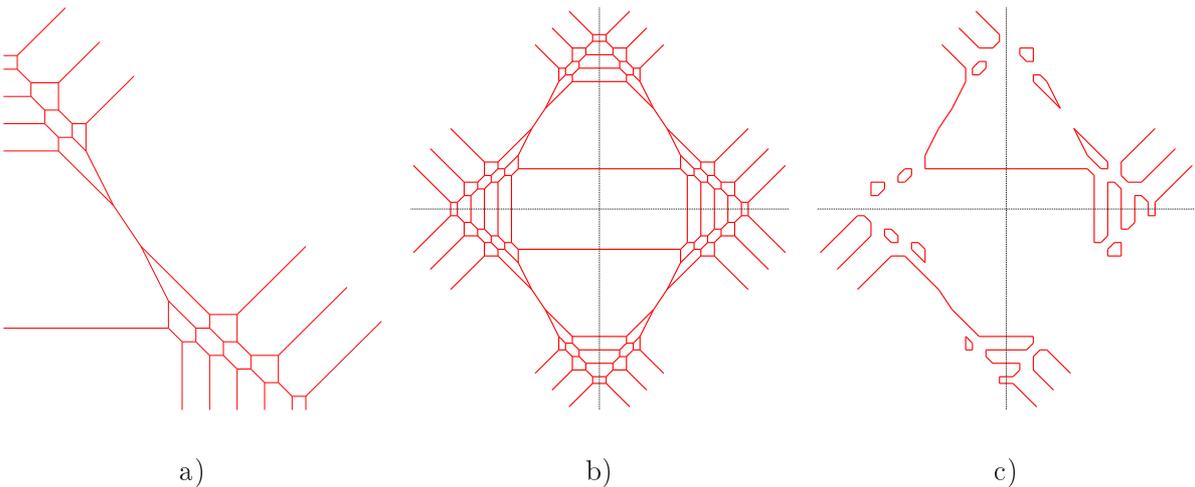


FIG. 15. Courbe de Gudkov

Tout d'abord, le corps \mathbb{R} n'étant pas algébriquement clos, il nous faut travailler non pas avec des courbes algébriques réelles, mais plus généralement avec des *courbes algébriques complexes*, c'est-à-dire les sous-ensembles de $(\mathbb{C}^*)^2$ définis par une équation de la forme $P(x, y) = 0$ où $P(x, y)$ est un

polynôme à coefficients complexes (qui peuvent donc être réels). Pour t un nombre réel positif, on définit l'application Log_t sur $(\mathbb{C}^*)^2$ par :

$$\begin{aligned} \text{Log}_t \quad (\mathbb{C}^*)^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (z, w) &\longmapsto (\log_t |z|, \log_t |w|) \end{aligned}$$

L'image d'une courbe algébrique d'équation $P(x, y) = 0$ par l'application Log_t , notée $\mathcal{A}_t(P)$, est appelée l'*amibe en base t* de la courbe. Le théorème suivant fournit un lien fondamental entre la géométrie algébrique classique et la géométrie tropicale : toute courbe tropicale est limite d'amibes de courbes algébriques complexes.

Théorème 5.2 (G. Mikhalkin, H. Rullgård). *Soit $P_\infty(x, y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j$ un polynôme tropical, et soit $\alpha_{i,j}$ un nombre complexe non nul pour chaque coefficient $a_{i,j}$ différent de $-\infty$. Pour tout $t > 0$, on définit le polynôme complexe $P_t(x, y) = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} t^{-a_{i,j}} x^i y^j$. Alors l'amibe $\mathcal{A}_t(P_t)$ converge vers la courbe tropicale définie par $P_\infty(x, y)$ lorsque t tend vers l'infini.*

La déquantification de la droite vue à la partie 4.2 est un cas particulier de cet énoncé : l'amibe en base t de la droite d'équation $t^0 x - t^0 y + t^0 1 = 0$ converge vers la droite tropicale définie par " $0x + 0y + 0$ ". On déduit le théorème de Viro du théorème précédent en remarquant, entre autre, que si les $\alpha_{i,j}$ sont des nombres réels, alors les courbes définies par les polynômes $P_t(x, y)$ sont des courbes algébriques réelles.

5.4. Exercices.

- (1) *Construire une courbe tropicale réelle de degré 2 réalisant le même arrangement qu'une hyperbole dans \mathbb{R}^2 . Même question avec une parabole. Peut-on construire une courbe tropicale réelle réalisant le même arrangement qu'une ellipse ?*
- (2) *À l'aide du patchwork, montrer qu'il existe une courbe algébrique réelle de degré 4 réalisant l'arrangement de la figure 12b. On pourra s'inspirer de la construction illustrée à la figure 14.*
- (3) *Montrer que pour tout degré d , il existe une courbe algébrique réelle plane avec $\frac{d(d-1)+2}{2}$ composantes connexes.*

6. RÉFÉRENCES

Afin de ne pas noyer le lecteur dans un flot de références plus ou moins accessibles, nous ne renvoyons que vers des textes d'introduction à la géométrie tropicale et ses applications. Pour avoir des références plus spécialisées, on pourra se reporter aux références des textes cités. Attention, certains auteurs préfèrent utiliser le minimum au lieu du maximum dans l'algèbre tropicale !

Les introductions à la géométrie tropicale [BPS08] et [SS] s'adressent à des lecteurs ayant un bagage mathématique minimum. Les lecteurs plus expérimentés pourront également lire les ouvrages [RGST05], [IMS07] ou [Gat]. Pour les géomètres confirmés, nous conseillons les états de l'art [Mik04] et [Mik06].

Pour en savoir plus sur le 16ème problème de Hilbert, le patchwork, la déquantification de Maslov et les amibes de courbes algébriques, nous renvoyons aux textes [Vir01], [Vir08], [IV96] et [Mik04] ainsi qu'au site Web [Vir].

Pour terminer cette introduction à la géométrie tropicale, précisons que cette dernière s'applique avec succès dans de nombreux domaines autres que le 16ème problème de Hilbert. Citons par exemple la géométrie énumérative, la combinatoire, la symétrie miroir, la biologie mathématique...

RÉFÉRENCES

- [BPS08] N. Berline, A. Plagne, and C. Sabbah, editors. *Géométrie tropicale*. Éditions de l'École Polytechnique, Palaiseau, 2008. 128 p.
- [Gat] A. Gathmann. Tropical algebraic geometry. arXiv : math.AG/0601322.
- [IMS07] I. Itenberg, G. Mikhalkin, and E. Shustin. *Tropical Algebraic Geometry*, volume 35 of *Oberwolfach Seminars Series*. Birkhäuser, 2007.
- [IV96] I. Itenberg and O. Viro. Patchworking algebraic curves disproves the Ragsdale conjecture. *Math. Intelligencer*, 18(4) :19–28, 1996.
- [Mik04] G. Mikhalkin. Amoebas of algebraic varieties and tropical geometry. In *Different faces of geometry*, volume 3 of *Int. Math. Ser. (N. Y.)*, pages 257–300. Kluwer/Plenum, New York, 2004.
- [Mik06] G. Mikhalkin. Tropical geometry and its applications. In *International Congress of Mathematicians. Vol. II*, pages 827–852. Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.
- [RGST05] J. Richter-Gebert, B. Sturmfels, and T. Theobald. First steps in tropical geometry. In *Idempotent mathematics and mathematical physics*, volume 377 of *Contemp. Math.*, pages 289–317. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [SS] D. Speyer and B. Sturmfels. Tropical mathematics. *Mathematics Magazine*. Cours au Clay Mathematics Institute, Park City, Utah, accessible sur <http://arxiv.org/abs/math.CO/0408099>.
- [Vir] O. Viro. <http://www.pdmi.ras.ru/~olegviro/patchworking.html>.
- [Vir01] O. Viro. Dequantization of real algebraic geometry on logarithmic paper. In *European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000)*, volume 201 of *Progr. Math.*, pages 135–146. Birkhäuser, Basel, 2001.
- [Vir08] O. Viro. From the sixteenth Hilbert problem to tropical geometry. *Japanese Journal of Mathematics*, 3(2), 2008.

UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE, PARIS 6, 175 RUE DU CHEVALERET, 75 013 PARIS, FRANCE
E-mail address: brugalle@math.jussieu.fr