

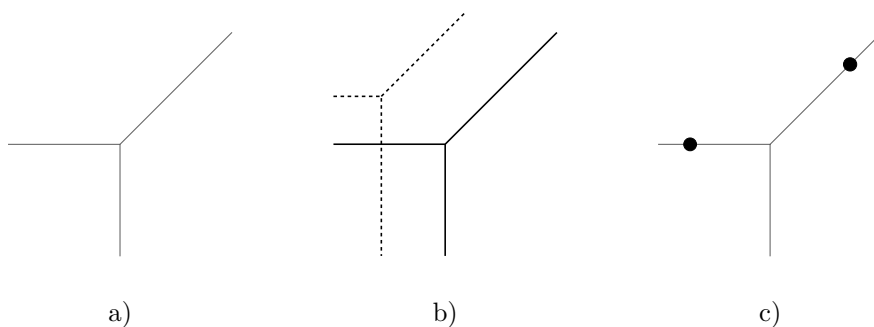
En smula tropisk geometrié

Erwan Brugallé

Université Pierre et Marie Curie, Paris 6
175 rue du Chevaleret, 75 013 Paris, France
brugalle@math.jussieu.fr

Vad är det egentligen för konstiga bilder och magiska företeelser som gömmer sig bakom det gåtfulla namnet *tropisk geometri*? I tropikerna liksom överallt annars är det svårt att tänka sig något enklare än en rät linje. Detta får alltså bli utgångspunkten för vår studie.

En tropisk linje är sammansatt av tre halvlinjer i riktingarna $(-1, 0)$, $(0, -1)$ och $(1, 1)$ som strålar ut från en godtycklig punkt i planet (se bild 1a). Frågan varför man ska kalla detta bisarra objekt för en linje, tropisk eller icke, kan ju tyckas vara motiverad. Men vid närmare betraktelse kan man faktiskt konstatera att dessa tropiska linjer har samma grundläggande egenskaper som ”vanliga”, eller ”klassiska”linjer: två tropiska linjer skär varandra i en unik punkt (se bild 1b), och två punkter i planet definierar en unik linje (se bild 1c).



Figur 1: Den tropiska linjen.

Ännu viktigare, även om det är mindre uppenbart i figuren, är att klassiska linjer och tropiska linjer båda definieras av en ekvation på formen $ax + by + c = 0$. Inom den vanliga algebrans ramar, där man kallar addition för addition och multiplikation för multiplikation så känner man lätt igen en klassisk linje i ekvationen ovan. Men i den tropiska världen, så betyder addera att ta maximum, och multiplikation innebär addition, och detta gör att alla objekt dramatiskt ändrar form! Det är till och med så att ett uttryck som ”att vara lika med 0” får en annan betydelse.

Klassisk geometri och tropisk geometri är alltså utvecklade enligt samma principer utgående från två räkneoperationer. De två geometrierna är ansikten för två olika algebror.

Tropisk geometri är dock inte bara ett sterilt glaspärlespel för sysslösa matematiker. Den klassiska världen kan *degenereras* till den tropiska, och de tropiska objekten bevarar då naturligt vissa egenskaper hos de klassiska objekt de är gränsvärden av. Sålunda har ett tropisk påstående en stor chans att ha en klassisk motsvarighet. Tropiska objekt är dessutom styckvis linjära och är därmed betydligt enklare att studera än deras klassiska motparter!

Man kan således sammanfatta det tropiska angreppssättet i följande princip:

Studera enkla objekt, formulera satser om komplicerade objekt.

De första avsnitten i denna text ägnas åt tropisk algebra, tropiska kurvor och några egenskaper hos dessa. Vi förklarar sedan varför den klassiska geometrin och den tropiska är sammankopplade, genom att på ett koncist sätt visa hur den klassiska världen kan fås att degenerera precis till den tropiska. Därefter illustrerar vi denna princip med den så kallade *patchwork-metoden* för att konstruera reella algebraiska kurvor via så kallade *amöbor*. Vi avslutar med att ge några referenser till litteraturen.

Men innan vi påbörjar några teoretiska djupdykningar måste vi förklara varför vi använder ordet ”tropisk” geometri. Är det på grund av den exotiska formen hos objekten vi studerar? På grund av närvaron av amöbor med skelett? Innan man hade infört termen tropisk algebra, så använde man det mer prosaiska namnet *max-plus algebra*. För att hedra sin brasilianske kollega Imre Simon bestämde sig matematikerna vid l’Université Paris 7 att byta ordet ”max-plus” mot ”tropisk”. Vi kan låta Wikipedia¹ få slutordet om ordet tropisk: *det beskriver helt enkelt den franska synen på Brasilien*.

1 Tropisk algebra

1.1 Tropiska operationer

Då vi byter ut operationerna addition och multiplikation mot maximum respektive addition, samt applicerar dessa två operationer på de reella talen \mathbb{R} , så erhålls vad vi kallar för tropisk algebra. Med andra ord så definierar man två nya räknelarag på \mathbb{R} , kallade *tropisk addition* och *tropisk multiplikation* och använder notationen ”+” and ” \times ”, där

$$"x + y" = \max(x, y) \quad \text{och} \quad "x \times y" = x + y.$$

Genom hela denna text kommer de tropiska operationerna att skrivas mellan citationstecken. Som för klassisk multiplikation förkortar vi ofta ” $x \times y$ ” som ” xy ”. Vi bekantar oss med dessa två operationer genom några enkla exempel:

¹15 mars 2009.

$$\begin{aligned} "1 + 1" = 1, \quad "1 + 2" = 2, \quad "1 + 2 + 3" = 3, \quad "1 \times 2" = 3, \quad "1 \times (2 + (-1))" = 3, \\ "1 \times (-2)" = -1, \quad "(5 + 3)^2" = 10. \end{aligned}$$

Dessa två räkneregler har många egenskaper gemensamt med de klassiska räkneoperationerna addition och multiplikation. Till exempel så är båda operationerna kommutativa, och operationen \times är distributiv med avseende på operationen $+$, det vill säga $(x+y)z = xz+yz$. Det finns dock två signifikanta skillnader. Först och främst har tropisk addition inget identitetslement i \mathbb{R} .

Det kan vi dock råda bot på genom att naturligt utvidga de två tropiska operationerna till $-\infty$ och definiera

$$\forall x \in \mathbb{T}, \quad "x + (-\infty)" = \max(x, -\infty) = x \quad \text{och} \quad "x \times (-\infty)" = x + (-\infty) = -\infty,$$

där $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ är de *tropiska talen*.

Om vi lägger till $-\infty$ till \mathbb{R} så har alltså tropisk addition ett identitetslement. Å andra sidan finns en ännu viktigare skillnad mellan tropisk och klassisk addition: elementen i \mathbb{R} saknar inverser med avseende på räknesättet $+$. Med andra ord så finns det ingen tropisk subtraktion. Vad värre är, den här gång fungerar det inte att lägga till nya element och på så sätt skapa inverser. I själva verket är $+$ en *idempotent* operation, det vill säga $x + x = x$ i hela \mathbb{T} ! Vi har alltså inget annat val än att vänja oss vid denna brist på symmetri för $+$.

Men bortsett från den sista punkten så uppfyller \mathbb{T} tillsammans med räknesätten $+$ och \times alla andra egenskaper för en kropp. Till exempel så är 0 ett identitetslement för tropisk multiplikation, och samtliga element i \mathbb{T} utom $-\infty$ har ett inverst element i $"1/x" = -x$. Man säger att \mathbb{T} är en *halvkropp*.

Det gäller att vara försiktig då man börjar räkna tropiskt så man inte går för fort fram! Till exempel så gäller att $"2x" \neq "x + x"$ utan istället $"2x" = x + 2$, på samma sätt som $"1x" \neq x$ utan istället $"1x" = x + 1$, och även $"0x" = x$ och $"(-1)x" = x - 1$.

1.2 Tropiska polynom

Efter att ha definierat tropisk addition och multiplikation, så faller det sig naturligt att vi också vill införa uttryck på formen $P(x) = \sum_{i=0}^d a_i x^i$ där $a_i \in \mathbb{T}$, det vill säga tropiska polynom². Skriver man om $P(x)$ med klassisk notation så får man $P(x) = \max_{i=0}^d (a_i + ix)$. Här kommer några exempel på tropiska polynom:

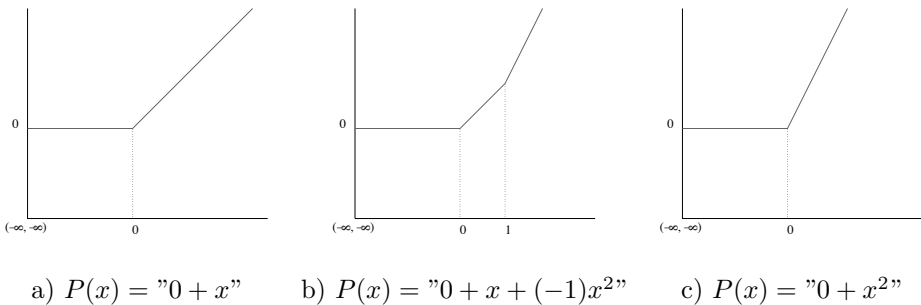
$$\begin{aligned} "x" = x, \quad "1 + x" = \max(1, x), \quad "1 + x + 3x^2" = \max(1, x, 2x + 3), \\ "1 + x + 3x^2 + (-2)x^3" = \max(1, x, 2x + 3, 3x - 2). \end{aligned}$$

²Vi betraktar här polynomfunktioner snarare än algebraiska polynom.

Vi vill nu bestämma rötterna till ett tropiskt polynom. Men allra först, vad är en tropisk rot? Vi möter nu ett problem som förblir återkommande inom tropisk matematik: en klassisk företeelse har oftast ett flertal definitioner som är ekvivalenta i den klassiska världen, men inte längre är så i ett tropiskt sammanhang. Varje definition av ett och samma klassiska objekt kan alltså potentiellt sett generera olika tropiska objekt.

Den första definitionen av en rot till ett klassiskt polynom $P(x)$ är ett element x_0 sådant att $P(x_0) = 0$. Om man skulle översätta denna definition till ett tropiskt algebraiskt språk så skulle man alltså söka ett element $x_0 \in \mathbb{T}$ så att $P(x_0) = -\infty$. Men om a_0 är den konstanta termen i polynomet $P(x)$ så gäller nu att $P(x) \geq a_0$ för alla x i \mathbb{T} . Polynomet $P(x)$ saknar alltså rötter i alla fall då $a_0 \neq -\infty$. Det säger sig självt att denna definition inte är särskilt tillfredställande.

Alternativt så är x_0 en rot till polynomet $P(x)$ om det existerar ett polynom $Q(x)$ så att $P(x) = (x - x_0)Q(x)$. Vi ska få se att denna definition är den som bäst lämpar sig för översättning till tropisk algebra. För att förstå detta väljer vi att betrakta problemet med ett geometriskt synsätt. Ett tropiskt polynom är en styckvis affin funktion (se figur 2), och vi kallar alla de punkter $x_0 \in \mathbb{T}$ där grafen av $P(x)$ har ett hörn för tropiska rötter till $P(x)$. Skillnaden i lutning mellan två till en rot angränsande linjestycken kallas rotens *grad*. Alltså har polynomet " $0 + x$ " den enkla roten 0, polynomet " $0 + x + (-1)x^2$ " har de två enkla rötterna 0 och 1, och polynomet " $0 + x^2$ " har en dubbelrot i $x_0 = 0$.



Figur 2: Exempel på grafer för tropiska polynom.

Rötterna till det tropiska polynomet $P(x) = \max_{i=0}^d a_i x^i = \max_{i=1}^d (a_i + ix)$ är alltså exakt de tropiska tal x_0 för vilka det existerar $i \neq j$ sådana att $P(x_0) = a_i + ix_0 = a_j + jx_0$. Man säger att $P(x)$ antar sitt maximum (minst) två gånger i x_0 . I detta fall är ordningen för roten x_0 det största värde som $|i - j|$ antar för alla möjliga val av i och j som realiserar detta maximum. Till exempel antas maximum för $P(x) = "0 + x + x^2"$ tre gånger i 0 och ordningen för denna rot är två. På samma sätt är x_0 en tropisk rot till $P(x)$ av ordning k om det finns ett polynom $Q(x)$ sådant att $P(x) = "(x + x_0)^k Q(x)"$. Lägg märke till att faktorn $x - x_0$ i klassisk algebra transformeras till " $x + x_0$ " i tropisk algebra, eftersom roten till polynomet " $x + x_0$ " är x_0 och inte $-x_0$.

Denna definition av tropiska rötter är uppenbarligen mer tillfredställande än den första. Man har faktiskt följande resultat.

Proposition 1.1. *Den tropiska halvkroppen är algebraiskt sluten, det vill säga varje tropiskt polynom av grad d har exakt d tropiska rötter räknat med multiplicitet.*

Till exempel har man följande faktoriseringar³:

$$"0 + x + (-1)x^2" = "(-1)(x + 0)(x + 1)" \quad \text{och} \quad "0 + x^2" = "(x + 0)^2"$$

1.3 Övningar

1. *Tropisk addition är som sagt idempotent. På vilket sätt förhindrar detta existensen av tropisk subtraktion?*
2. *Skissa graferna till de tropiska polynomen $P(x) = "x^3 + 2x^2 + 3x + (-1)"$ och $Q(x) = "x^3 + (-2)x^2 + 2x + (-1)"$ samt bestäm deras rötter.*
3. *Låt a vara ett tal i \mathbb{R} och b och c tal i \mathbb{T} . Bestäm de tropiska rötterna till de tropiska polynomen $"ax + b"$ och $"ax^2 + bx + c"$.*

2 Tropiska kurvor

2.1 Definition av begreppet "tropisk kurva"

Vi tänker nu djärvt drista oss till att öka antalet variabler i våra polynom. Ett tropiskt polynom i två variabler skrivs $P(x, y) = "\sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j"$, eller i klassisk notation $P(x, y) = \max_{i,j} (a_{i,j} + ix + jy)$. Således är $P(x, y)$ en styckvis affin funktion, och den *tropiska kurvan* C som definieras av $P(x, y)$ utgörs av brytpunkterna hos denna funktion. Med andra ord, C består av de punkter (x_0, y_0) i \mathbb{T}^2 för vilka maximum antas minst två gånger i (x_0, y_0) .

Vi kommer fokusera på tropiska kurvor i \mathbb{R}^2 snarare än \mathbb{T}^2 . Det förändrar inte allmängiltigheten av det som sägs här, men det gör definitionerna, påståendena och bilderna tydligare och lättare att förstå.

Betrakta den tropiska linjen definierad av polynomet $P(x, y) = "1/2 + 2x + (-5)y"$. Man söker alltså de punkter i \mathbb{R}^2 som uppfyller ett av följande tre system:

$$2 + x_0 = \frac{1}{2} \geq -5 + y_0, \quad -5 + y_0 = \frac{1}{2} \geq 2 + x_0, \quad 2 + x_0 = -5 + y_0 \geq \frac{1}{2}.$$

Vår tropiska linje är således sammansatt av tre halvlinjer (se figur 3 a):

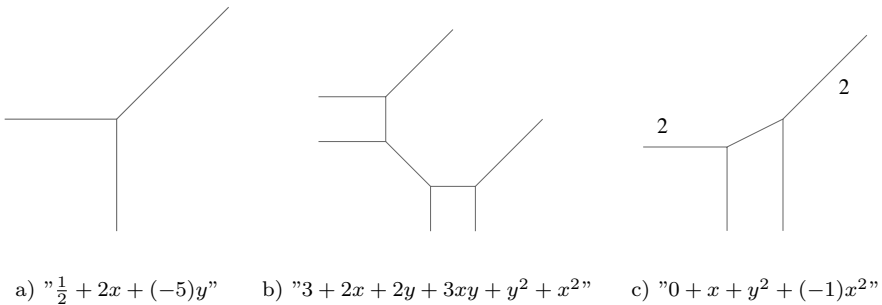
$$\{(-3/2, y) | y \leq 11/2\}, \{(x, 11/2) | x \leq -3/2\} \text{ och } \{(x, x + 7) | x \geq -3/2\}.$$

³Vi poängterar återigen att dessa likheter stämmer för polynomfunktioner men inte för polynom! $"0 + x^2"$ och $"(0 + x)^2"$ är likvärdiga som polynomfunktioner men ej som polynom.

Vi saknar fortfarande en ingrediens för att kunna ge en rigorös definition av en tropisk kurva. Brytpunkterna hos ett tropiskt polynom i två variabler består av segment och halvlinjer som vi kallar *kanter*, vilka skär varandra i punkter om kallas *hörn*. Som i fallet med polynom i en variabel måste vi för varje kant beakta skillnaden i lutning hos $P(x, y)$ då man närmar sig kanten från olika håll. Vi kommer alltså fram till följande formella definition.

Definition 2.1. Låt $P(x, y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j$ vara ett tropiskt polynom. Den tropiska kurvan C som definieras av $P(x, y)$ är mängden av punkter (x_0, y_0) i \mathbb{R}^2 för vilka det existerar $(i, j) \neq (k, l)$ som uppfyller $P(x_0, y_0) = a_{i,j} + ix_0 + jy_0 = a_{k,l} + kx_0 + ly_0$.

Givet en kant till C , så definieras vikten av denna kant som maximum av största gemensamma delare till talen $|i - k|$ och $|j - l|$, för alla par (i, j) och (k, l) som svarar mot denna kant.



Figur 3: Några tropiska kurvor.

I våra bilder skriver vi ut vikten av en kant endast då vikten är minst 2. I fallet med den tropiska linjen så har alla kanter vikt 1, se figur 3a. Två exempel på tropiska kurvor av grad 2 är representerade i figur 3b och 3c. Det tropiska kägelsnittet i figur 3c har två kanter av vikt 2.

2.2 Den duala uppdelningen

Ett tropiskt polynom $P(x, y)$ ges alltså av maximum av ett ändligt antal affina funktioner, där varje sådan affin funktion utgör ett monom i $P(x, y)$. De punkter i planet för vilka minst två av monomen realiserar maximum utgör precis den tropiska kurvan C som definieras av $P(x, y)$. Låt oss nu förfina denna studie en aning och betrakta för varje punkt (x_0, y_0) på kurvan C alla monom i $P(x, y)$ som realiserar maximum i (x_0, y_0) .

Vi studerar först fallet med den tropiska linjen C definierad av $P(x, y) = \frac{1}{2} + 2x + (-5)y$ (se figur 3a). I punkten $(-3/2, 11/2)$, hörnet för linjen, har de tre monomen " $\frac{1}{2} = 1/2x^0y^0$ ", " $2x = 2x^1y^0$ " och " $(-5)y = (-5)x^0y^1$ " samma värde. Exponenterna för dessa monom, det vill säga punkterna $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(0, 1)$, definierar en triangel Δ_1 (se figur 4a). Längs den horisontella kanten av C ges värdet av polynomet $P(x, y)$ av monomen 0 och y , alltså av monomen med

exponenter $(0, 0)$ och $(0, 1)$. Linjesegmentet som definieras av dessa två exponenter är alltså den vertikala kanten hos triangeln Δ_1 . På samma sätt gäller att de monom som anger värdet för $P(x, y)$ längs den vertikala (respektive med lutning 1) kanten är de med exponenter $(0, 0)$ och $(1, 0)$ (respektive $(1, 0)$ och $(0, 1)$) och linjesegmentet som definieras av dessa exponenter är den horisontella (respektive den med lutning -1) kanten hos triangeln Δ_1 .

Vad avslöjar då denna lilla övning? Om man betraktar de monom som anger värdet för $P(x, y)$ i en punkt på den tropiska linjen C , så märker man att hörnet hos C motsvarar triangeln Δ_1 och att varje kant e på C motsvarar en kant på Δ_1 , vars lutning är vinkelrät i förhållande till e .

Vi betraktar nu det tropiska kägelsnittet definierat av polynomet $P(x, y) = "3 + 2x + 2y + 3xy + x^2 + y^2"$ som visas i figur 3b. Denna kurvas hörn är de fyra punkterna $(-1, 1)$, $(-1, 2)$, $(1, -1)$ och $(2, -1)$. I vart och ett av dessa hörn (x_0, y_0) ges värdet av $P(x, y)$ av tre monom:

$$\begin{aligned}
 P(-1, 1) &= 3 = y_0 + 2 = x_0 + y_0 + 3 & P(-1, 2) &= y_0 + 2 = x_0 + y_0 + 3 = 2y_0 \\
 P(1, -1) &= 3 = x_0 + 2 = x_0 + y_0 + 3 & P(2, -1) &= x_0 + 2 = x_0 + y_0 + 3 = 2x_0.
 \end{aligned}$$

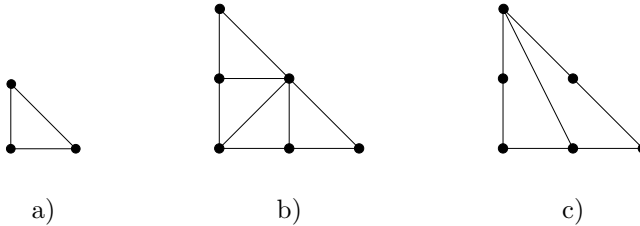
Så för varje hörn på C definierar exponenterna hos de tre motsvarande monomen en triangel, och de fyra trianglarna gränsar till varandra som i figur 4b. Dessutom, precis som i fallet med linjen, så gäller att för varje kant i C definierar exponenterna för de monom som ger värdet av $P(x, y)$ längs e en kant till en (eller två) av dessa trianglar, och riktningen hos denna kant är vinkelrät mot e .

Låt oss nu förklara detta fenomen i allmänhet. Låt $P(x, y) = "\sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j"$ vara ett godtyckligt tropiskt polynom. Graden hos $P(x, y)$ är det maximala värdet av $i + j$ för alla koefficienter $a_{i,j}$ som är skilda från $-\infty$. Vi antar för enkelhets skull att samtliga polynom av grad d som vi betraktar i denna text uppfyller att $a_{0,0} \neq -\infty$, $a_{d,0} \neq -\infty$ och $a_{0,d} \neq -\infty$. Detta innebär att det konvexa höljet av punkterna (i, j) för vilka $a_{i,j} \neq -\infty$ sammanfaller precis med triangeln Δ_d som består av hörnen $(0, 0)$, $(d, 0)$ och $(0, d)$.

Om $v = (x_0, y_0)$ är ett hörn hos C , så är konvexa höljet av punkterna (i, j) i $\Delta_d \cap \mathbb{Z}^2$ för vilka $P(x_0, y_0) = a_{i,j} + ix_0 + jy_0$, en polygon Δ_v innehållen i Δ_d . På samma sätt, om (x_0, y_0) är en punkt i det inre av en kant e på C , så är konvexa höljet av punkterna (i, j) på $\Delta_d \cap \mathbb{Z}^2$ där $P(x_0, y_0) = a_{i,j} + ix_0 + jy_0$, ett linjesegment δ_e inuti Δ_d . Eftersom det tropiska polynomet är en konvex och styckvis affin funktion, så bildar unionen av alla polygoner Δ_v en *uppdelning* av Δ_d . Med andra ord är unionen av polygonerna Δ_v lika med triangeln Δ_d , och två polygoner Δ_v och $\Delta_{v'}$ har antingen en kant gemensam, ett hörn gemensamt, eller är helt disjunkta. Dessutom, om e är en kant på C som gränsar till hörnet v , då är δ_e en kant på Δ_v , och riktningarna hos e och δ_e är vinkelräta. Denna uppdelning av Δ_d kallas den *duala uppdelningen* till C .

Som exempel är de duala uppdelningarna av de tropiska kurvorna i figur 3 utritade i figur 4. (De svarta punkterna representerar punkterna med heltalskoordinater, och är inte nödvändigtvis uppdelningens hörn.)

Lägg märke till att e är en kant med vikt w i C om och endast om segmentet δ_e innehåller $w + 1$ punkter i \mathbb{Z}^2 . Det betyder att graden av en tropisk kurva kan avläsas direkt på kurvan: den är summan av vikterna hos de oändliga kanterna i riktning $(-1, 0)$ (eller $(0, -1)$ eller $(1, 1)$). Vad mera är, en tropisk kurva ges i sin tur av sin duala uppdelning upp till translation och skalning av dess kanter.



Figur 4: Några duala uppdelningar.

2.3 Balanserade grafer och tropiska kurvor

Den första konsekvensen av denna dualitet är en viss ekvation, kallad *jämviktsrelationen*, som uppfylls vid vart och ett av hörnen på en tropisk kurva. Låt v vara ett hörn på C med närliggande kanter e_1, \dots, e_k med respektive vikter w_1, \dots, w_k . Eftersom e_i ligger på en linje (i vanlig mening) vars definierande ekvation har heltalskoefficienter, så finns en unik vektor $v_i = (\alpha, \beta)$ på e_i som utgår från hörnet v och där α och β är relativt prima (se figur 5a). I enlighet med föregående avsnitt kan man ur den duala polygonen Δ_v i v omedelbart utläsa vektorerna $w_1 v_1, \dots, w_k v_k$: om vi ger randen till Δ_v moturs orientering, så fås varje kant δ_{e_i} på Δ_v som är dual med e_i från vektorn $w_i v_i$ genom en rotation med vinkeln $\pi/2$ (se figur 5b).

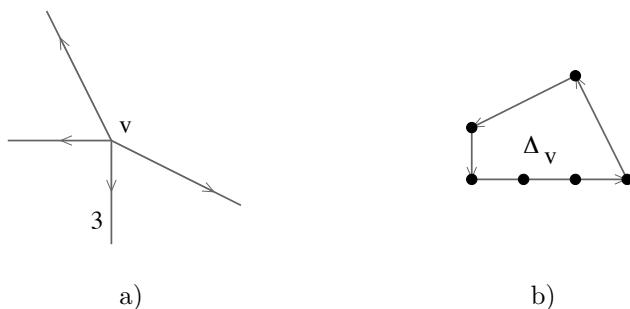
På grund av att Δ_v är sluten, kan man från det sista omedelbart dra slutsatsen att vi har följande jämviktsrelation:

$$\sum_{i=1}^k w_i v_i = 0.$$

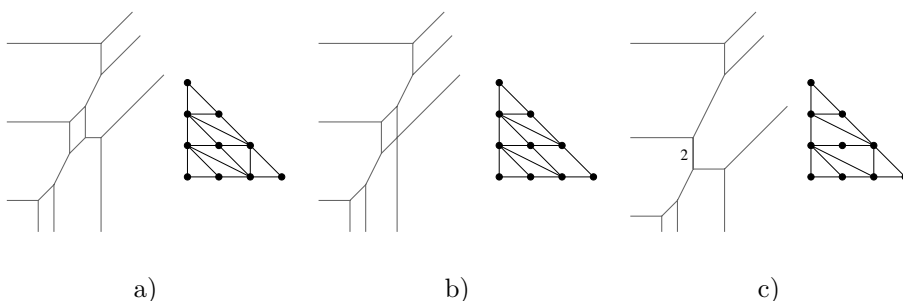
En graf i \mathbb{R}^2 som uppfyller jämviktsrelationen i vart och ett av sina hörn kallas för en *balanserad graf*. Vi kommer se att alla tropiska kurvor är balanserade grafer. Faktum är att det omvända också är sant:

Sats 2.2. *En kurva i \mathbb{R}^2 är tropisk om och endast om den är en balanserad graf.*

Vi kan alltså konstatera att det finns tropiska polynom av grad 3 som motsvarar de balanserade graferna i figur 6. Vi har i vart och ett av fallen också ritat ut den duala uppdelningen till kurvan.



Figur 5: Jämviktsrelationen.



Figur 6: Några tropiska kurvor och deras duala uppdelningar.

2.4 Övningar

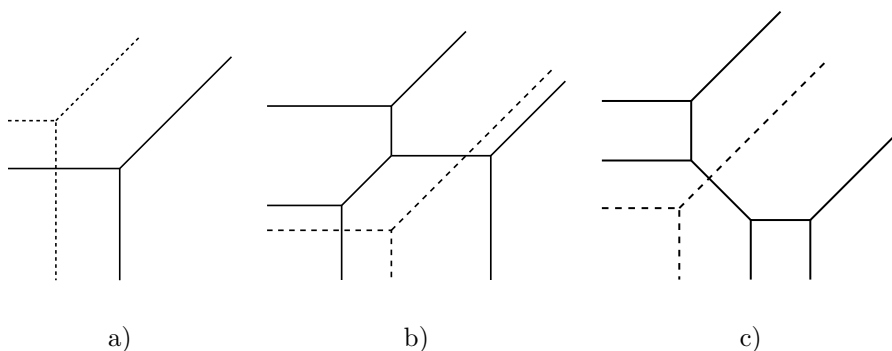
1. Rita ut de tropiska kurvorna som definieras av de tropiska polynomen $P(x, y) = "5 + 5x + 5y + 4xy + 1y^2 + x^2"$ och $Q(x, y) = "7 + 4x + y + 4xy + 3y^2 + (-3)x^2"$ samt deras duala uppdelningar.
2. En tropisk triangel är ett ändligt område i \mathbb{R}^2 begränsat av tre tropiska linjer. Vilka är de möjliga formerna på en tropisk triangel?
3. Visa att en tropisk kurva av grad d har som mest d^2 hörn.
4. Hitta en ekvation för var och en av de tropiska kurvorna i figur 6. Följande tips kan vara användbart: om v är ett hörn för en tropisk kurva som definieras av ett tropiskt polynom $P(x, y)$, då följer att värdet på $P(x, y)$ i en omgivning till v enbart ges av monomen som motsvarar den polygon som är dual till v .

3 Tropisk snitt-teori

3.1 Bézouts sats

En viktig poäng med den tropiska geometrin är att erbjuda en enkel modell för algebraisk geometri. Ett exempel är att den grundläggande snitt-teorin för tropiska kurvor kräver betydligt mindre algebraiskt bagage jämfört med dess klassiska motsvarighet. Vi ska illustrera denna princip i fallet med Bézouts sats, som säger att två plana algebraiska kurvor av grad d_1 och d_2 skär varandra i $d_1 d_2$ punkter⁴. Innan vi går på det allmänna fallet betraktar vi först tropiska linjer och kägelsnitt.

Två tropiska linjer skär varandra i en unik punkt (se figur 7a), precis som i klassisk geometri. Vi ställer oss nu frågan huruvida en linje och ett kägelsnitt skär varandra i två punkter. Om man naivt räknar antalet skärningspunkter blir svaret ibland ja (se figur 7b) och ibland nej (figur 7c).



Figur 7: Skärning mellan tropiska linjer och tropiska kägelsnitt.

I själva verket bör den enda skärningspunkten i figur 7c räknas två gånger. Men varför räkna dubbelt här och bara en gång per skärningspunkt i föregående fall? Svaret finner vi i den duala uppdelningen till unionen av de båda kurvorna.

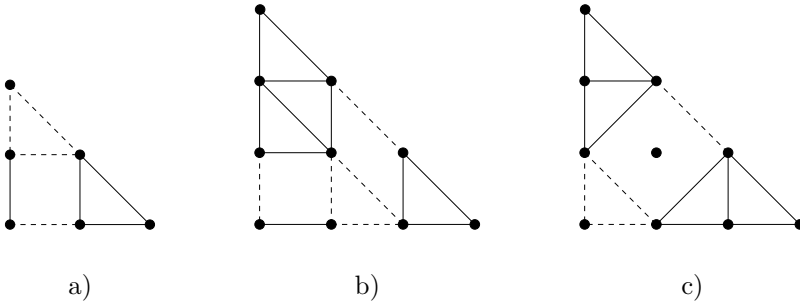
Lägg för det första märke till att unionen av de båda tropiska kurvorna C_1 och C_2 också är en tropisk kurva. Detta innebär att vi lätt verifierar att unionen av två balanserade grafer också är en balanserad graf, men man inser dessutom att eftersom de två tropiska kurvorna C_1 och C_2 är definierade av de tropiska polynomen $P_1(x, y)$ respektive $P_2(x, y)$, så gäller att polynomet $Q(x, y) = P_1(x, y)P_2(x, y)$ definierar kurvan $C_1 \cup C_2$. Dessutom gäller att graden av $C_1 \cup C_2$ är summan av graden av C_1 och C_2 . Således har det mening att prata om den duala uppdelningen till kurvan $C_1 \cup C_2$.

De duala uppdelningarna till unionen av kurvorna C_1 och C_2 i fallen i figur 7 är avbildade i figur 8. I vart och ett av fallen är hörnen för $C_1 \cup C_2$ desamma som hörnen för C_1 och C_2 samt skärningspunkterna mellan C_1 och C_2 . Eftersom varje punkt i $C_1 \cap C_2$ är en skärningspunkt mellan en kant i C_1 och en kant i C_2

⁴Lägg märke till att detta är en sats i projektiv geometri! Till exempel så kan ju två affina linjer vara parallella...

så är den duala polygonen till ett sådant hörn i $C_1 \cup C_2$ en parallelogram. För att göra figur 8 tydligare har vi samma färg på den duala uppdelningen som på dess duala kant. Vi konstaterar nu att de tre parallelogrammer som motsvarar skärningspunkterna i figur 8a alla har area 1, medan parallelogrammen i figur 8c har area 2! Således verkar det som att man måste räkna varje skärningspunkt med multiplicitet definierad enligt nedan.

Definition 3.1. Låt C_1 och C_2 vara två tropiska kurvor som skär varandra i ett ändligt antal punkter och enbart utanför hörnen för de två kurvorna, och låt p vara en av skärningspunkterna mellan C_1 och C_2 . Multipliciteten för p är då arean av den duala parallelogrammen till p i den duala uppdelningen till $C_1 \cup C_2$.



Figur 8: Duala uppdelningarna till unionen av kurvorna i figur 7.

Med denna definition så blir problemet att visa Bézouts sats rena barnleken.

Sats 3.2. Låt C_1 och C_2 vara två tropiska kurvor av grad d_1 och d_2 som skär varandra i ett ändligt antal punkter och utanför kurvornas hörn. Då är summan av de tropiska multipliciteterna hos skärningspunkterna mellan C_1 och C_2 lika med d_1d_2 .

Bevis. Låt s vara denna summa. Det finns då tre sorters polygoner i den duala uppdelningen till den tropiska kurvan $C_1 \cup C_2$:

- de som är duala till ett hörn i C_1 . Summan av deras area är lika med arean av Δ_{d_1} , alltså $d_1^2/2$.
- de som är duala till ett hörn i C_2 . Summan av deras area är lika med $d_2^2/2$.
- de som är duala till en skärningspunkt mellan C_1 och C_2 . Summan av deras area är lika med s .

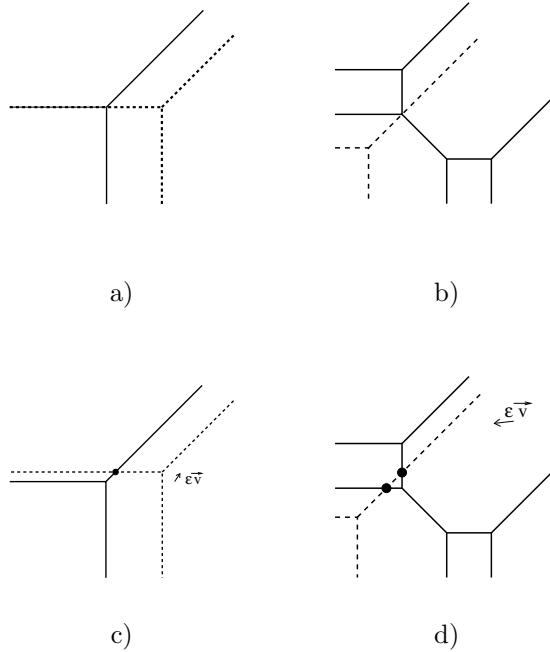
Eftersom kurvan $C_1 \cup C_2$ är av grad $d_1 + d_2$ så är summan av samtliga dessa polygoner lika med arean av $\Delta_{d_1+d_2}$, alltså $(d_1 + d_2)^2/2$ och vi får

$$s = \frac{(d_1 + d_2)^2 - d_1^2 - d_2^2}{2} = d_1d_2.$$

□

3.2 Stabilt snitt

Så här långt har vi begränsat oss till att betrakta tropiska kurvor som skär varandra "snällt", med andra ord i ett ändligt antal punkter och utanför kurvornas hörn. Men vad kan man säga i de två fall som representeras i figur 9a (två tropiska linjer som skär varandra längs en kant) och b (en linje som går genom hörnet på en konisk kurva)? Lyckligtvis så har vi mer än ett tropiskt trick i fickan.



Figur 9: Icke vinkelrät skärning med translation.

Låt ε vara ett litet reellt tal och v vara en vektor där förhållandet mellan de två koordinaterna är ett irrationellt tal. Om man i vart och ett av fallen translaterar en av de två kurvorna med vektorn εv , så återfår man ett snällt fall av skärning (se figur 9c och d). Uppenbarligen beror våra nya skärningspunkter på vektorn εv . Gränsvärdet av dessa punkter då ε närmar sig 0 beror dock inte på v , detta är de *stabila skärningspunkterna* för de två kurvorna. Multipliciteten för de stabila skärningspunkterna är lika med summan av multipliciteten för skärningspunkterna vars gränsvärden de är.

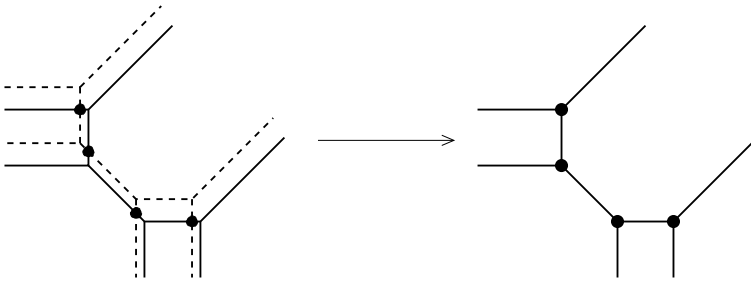
Till exempel är den stabila skärningspunkten för de två linjerna i figur 9a ett hörn för den vänstra linjen, och har multiplicitet 1. Våra två tropiska linjer skär alltså varandra mycket riktigt i en punkt. Den stabila skärningspunkten för de två tropiska kurvorna i figur 9b är ett hörn på det tropiska kägelsnittet, och skärningspunkten har multiplicitet 2.

Lägg märke till att stabila skärningspunkter för två tropiska kurvor är koncentrerade till isolerade skärningspunkter eller hörn för de två kurvorna. Tack vare

stabil skärning, så kan vi ta bort hypoteserna om lämpliga lägen för kurvorna i formuleringen av Bézouts sats.

Sats 3.3. *Låt C_1 och C_2 vara två tropiska kurvor av grad d_1 och d_2 . Summan av multipliciteten för de stabila skärningspunkterna är lika med d_1d_2 .*

Vi upptäcker här i förbigående en förvånande tropisk egenskap: en tropisk kurva har ett väldefinierad⁵ *självsnittspunkt*! Det räcker att helt enkelt tänka sig en kurvas stabila skärningspunkt med sig själv. Efter vad som sagts här inser vi att detta självsnitt är koncentrerat i hörnen på kurvan (se figur 10).



Figur 10: Självsnitt i fyra punkter för en tropisk konisk kurva.

3.3 Övningar

1. Bestäm de stabila skärningspunkterna för de två tropiska kurvorna i övning 1 i avsnitt 2, och bestäm också skärningspunkternas multiplicitet.
2. En dubbelpunkt på en tropisk kurva är en punkt där två av kurvans kanter skär varandra. Visa att ett tropisk kägelsnitt med en dubbelpunkt är en union av två tropiska linjer. Det kan hjälpa att betrakta en linje som går genom dubbelpunkten och ett annat av kurvans hörn.
3. Visa att en tropisk kurva av grad tre med två dubbelpunkter är en union av en tropisk linje och ett tropisk kägelsnitt. Visa att en tropisk kurva av grad tre med tre dubbelpunkter är en union av tre tropiska linjer.

4 Några ytterligare förklaringar

Låt oss stanna till här en stund i studiet av själva den tropiska geometrin, och begrunda orsakerna till dess starka band till den klassiska geometrin. Vårt mål är i synnerhet att illustrera det faktum att tropisk geometri kan ses som ett gränsvärde av den klassiska geometrin. För att grovt sammanfatta denna del av texten, så är tropisk geometri bilden av den klassiska geometrin avbildad med logaritmen med bas ∞ .

⁵I klassisk algebraisk geometri är endast antalet egenskärningspunkter definierat, inte dess läge på kurvan. En linje skär sig själv i en punkt, men det är oklart var...

4.1 Maslovs dekvantisering

Låt oss först förklara varför den tropiska halvkroppen naturligt uppstår som gränsvärde till den klassiska halvkroppen. Denna process, kallad *dekvantisering av de reella talen*, studerades av Victor Maslov och hans medarbetare under 90-talet. En välkänd halvkropp är $(\mathbb{R}_+, +, \times)$, de positiva reella talen inklusive noll tillsammans med klassisk addition och multiplikation. Om t är ett tal strikt större än noll, så bildar logaritmvbildningen med bas t en bijektion mellan \mathbb{R}_+ och \mathbb{T} och denna bijektion inducerar en halvkropsstruktur på \mathbb{T} , där operationerna ” $+_t$ ” och ” \times_t ”, ges av:

$${}_t x +_t y = \log_t(t^x + t^y) \quad \text{och} \quad {}_t x \times_t y = \log_t(t^x t^y) = x + y.$$

Redan här ser vi alltså hur klassisk addition fungerar som en sorts exotisk multiplikation på \mathbb{T} . Lägg märke till att från denna konstruktion följer att alla halvkropparna $(\mathbb{T}, {}_t +, {}_t \times)$ är isomorfa med $(\mathbb{R}_+, +, \times)$. Den triviala olikheten $\max(x, y) \leq x + y \leq 2 \max(x, y)$ på \mathbb{R}_+ tillsammans med tillväxten hos logaritmfunktionen ger oss följande begränsningar:

$$\forall t > 0, \max(x, y) \leq {}_t x \times_t y \leq \max(x, y) + \log_t 2.$$

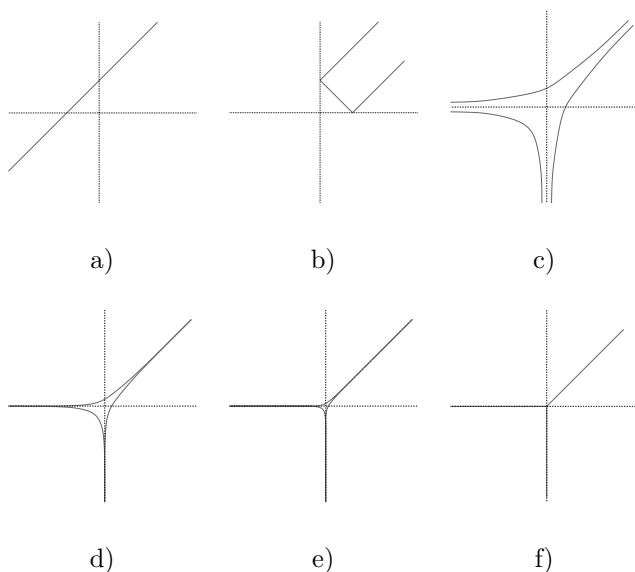
När t går mot oändligheten så närmar sig $\log_t 2$ noll, och räknesättet ” $+_t$ ” närmar sig då den tropiska additionen ” $+$ ”. På detta sätt uppstår alltså den tropiska halvkroppen naturligt som en degenererad version av den klassiska halvkroppen $(\mathbb{R}_+, +, \times)$. Alternativt kan man betrakta den klassiska halvkroppen $(\mathbb{R}_+, +, \times)$ som en deformation av den tropiska halvkroppen, därav termen ”dekvantisering”.

4.2 Dekvantisering av en linje i planet

Låt oss tillämpa ett liknande resonemang på linjen i \mathbb{R}^2 definierad av ekvationen $x - y + 1$ (se figur 11a). Avbilda först alla fyra kvadranter på den positiva kvadranten genom att ta absolutbelopp (se figur 11b). Bilden av logaritmen i bas t av denna hopvikta kurva i $(\mathbb{R}_{*+})^2$ liknar bilden i figur 11c. Att ta t -logaritmen innebär enligt definition att först ta den naturliga logaritmen och sedan skala med faktorn $\frac{1}{\ln t}$. När t ökar, så koncentrerar sig bilden av t -logaritmen av absolutbeloppet av vår linje till en omgivning av origo och de tre asymptotiska riktningarna (se figur 11c,d och e). Och när man låter t gå mot oändligheten så framträder i figur 11f... en tropisk kurva!

5 Patchwork

Figur 11 från vänster till höger beskriver hur en klassisk kurva i planet övergår i en tropisk linje. Faktum är att händelseförloppet då man istället går från höger till vänster i figuren ovan är ännu intressantare! Det visar nämligen hur man konstruerar en klassisk linje från en tropisk linje. Den teknik som kallas *patchwork* är en generalisering av denna observation. Den utgör en rent kombinatorisk metod för att konstruera reella algebraiska kurvor utifrån tropiska kurvor. Men innan vi förklarar denna metod i detalj, så vandrar vi lite bakåt i tiden.

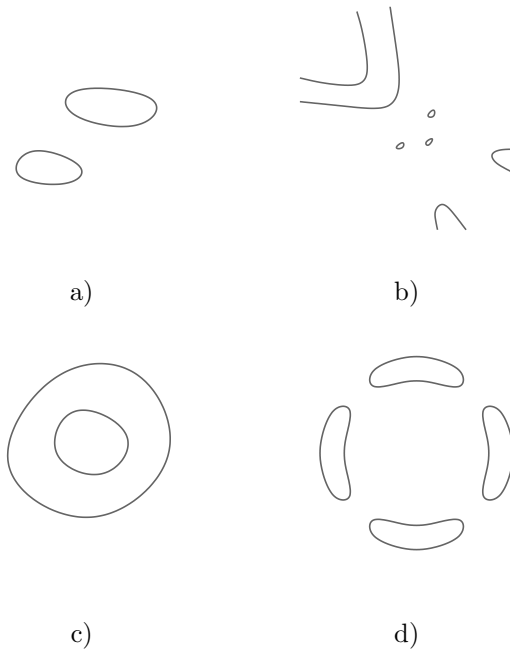


Figur 11: Dekvantisering av en linje.

5.1 Hilberts 16e problem

En reell algebraisk kurva i planet är en kurva i \mathbb{R}^2 definierad av en ekvation på formen $P(x, y) = 0$ där $P(x, y)$ är ett polynom med reella koefficienter. De reella algebraiska kurvorna av grad ett och två är enkla och välkända, de är de så kallade kägelsnitten. Allt eftersom graden hos $P(x, y)$ ökar blir bilden som ges av ekvationen $P(x, y) = 0$ mer och mer komplicerad. För att övertyga sig om detta kan man slänga ett öga på figur 12 där vi avbildat några möjliga bilder givna av reella algebraiska fjärdegradskurvor.

En sats av Axel Harnack från slutet av 1800-talet säger att en plan reell algebraisk kurva av grad d består av högst $d(d - 1)/2 + 1$ sammanhängande komponenter. Men hur kan dessa komponenter vara placerade i förhållande till varandra? Med ett *arrangemang* till en plan reell algebraisk kurva menar man positionen hos dess komponenter i planet relativt varandra. Med andra ord så bryr man sig inte om exakt var i planet kurvan befinner sig, utan enbart hur komponenterna förhåller sig till varandra. Om en kurva till exempel har två disjunkta komponenter, så är man bara intresserad av huruvida den ena är placerad inuti den andra (se figur 12a), eller inte (se figur 12c). Vid den andra internationella matematikerkongressen i Paris år 1900, presenterade David Hilbert sin berömda lista med 23 problem för 1900-talets matematiker, och den första delen i hans 16e problem kan tolkas i en (mycket) utvidgad form på följande sätt: *För ett allmänt d , ange alla möjliga arrangemang för en reell algebraisk kurva av grad d .*



Figur 12: Några reella algebraiska kurvor av grad 4.

På Hilberts tid var svaret känt för kurvor av grad högst fyra. Trots spektakulära framsteg rörande detta problem under 1900-talet, främst från ryska matematiker, återstår ett stort antal frågor obesvarade⁶ än idag...

5.2 Reella kurvor och tropiska kurvor

Det är i allmänhet ett svårt problem att konstruera en reell algebraisk kurva av given grad som uppfyller ett givet arrangemang. Under mer än ett sekels tid har matematiker föreslagit talrika intrikata metoder för detta. Patchwork-metoden som uppfanns av Oleg Viro på sjuttio-talet är en av de kraftfullaste. Vid denna tidpunkt existerade ännu inte den tropiska matematiken, och Viro presenterade sina resultat i ett annat språk än vi gör här. Han insåg dock mot slutet av nittio-talet att patchwork-metoden kunde tolkas som en kvantisering av tropiska kurvor. Patchwork innebär alltså att läsa figur 11 från höger till vänster istället för från vänster till höger. Tack vare denna nya tolkning kunde Mikhalkin kort därefter generalisera Viros ursprungliga metod. Vi ger här en förenklad version av patchwork, den intresserade läsaren kan hitta en mer komplett version i referenserna listade i avsnitt 6.

Om a och b är två heltal så betecknar vi med $s_{a,b} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sammansättningen av a speglingar med avseende på x -axeln följt av b speglingar med avseende på

⁶Ett mer rimligt och naturligt problem består i att undersöka arrangemangen för komponenterna hos reella icke-singulära projektiva algebraiska kurvor. För detta mer precisa problem är svaret känt upp till grad sju. Detta är en sats av Oleg Viro och patchwork-tekniken har en fundamental roll i beviset.

y -axeln. Värdena på a och b är bara viktiga modulo 2, och vi låter $s_{0,0}$ vara identitetsavbildningen medan $s_{0,1}$ är speglingen med avseende på x -axeln, $s_{1,0}$ står för speglingen med avseende på y -axeln och slutligen får $s_{1,1}$ vara speglingen med avseende på origo.

Vi förklarar nu patchwork-proceduren i detalj. Låt C vara en tropisk kurva av grad d som endast har kanter med udda vikt och där alla polygoner i den duala uppdelningen är trianglar. Man kan till exempel välja den tropiska linjen i figur 13a. För varje kant e på C väljer vi en heltalsvektor $v_e = (\alpha_e, \beta_e)$ parallell med e där α_e och β_e är relativt prima. I fallet med den tropiska linjen kan man ta vektorerna $(1, 0)$, $(0, 1)$, och $(1, 1)$. Nu tänker vi oss att det plan \mathbb{R}^2 där vår tropiska kurva lever i själva verket är den positiva kvadranten $(\mathbb{R}_{*+})^2$ i \mathbb{R}^2 , och vi tar unionen av vår kurva med sina tre spegelbilder i förhållande till axlarna. I fallet med den tropiska linjen, får vi då figur 13b. För varje kant e av vår kurva, radera två av de fyra symmetriska kopiorna, säg e' och e'' , enligt de två följande reglerna:

- $e' = s_{\alpha_e, \beta_e}(e'')$
- för varje hörn v på C med närliggande kanter e_1, e_2 och e_3 och för varje par $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ i $\{0, 1\}^2$, ska exakt en av de tre kopiorna $s_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(e_1)$, $s_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(e_2)$, och $s_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(e_3)$ raderas.

Vi kallar resultatet en *tropisk reell kurva*. Om till exempel C är en tropisk linje, så är det möjligt att radera sex speglade kanter genom att följa de två reglerna för att erhålla den reella tropiska linjen som visas i figur 13c. Även om denna reella tropiska kurva är en rät linje, så representerar den ändå samma arrangemang som en klassisk linje i \mathbb{R}^2 (se figur 13d)!

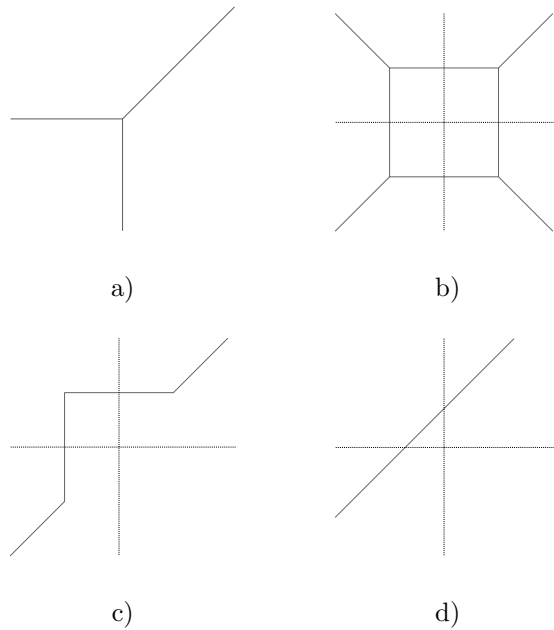
Detta förhåller sig inte så av en slump, utan är i själva verket en sats.

Sats 5.1 (O. Viro). *Varje tropisk kurva av grad d reliserar samma arrangemang som en reell algebraisk kurva av samma grad.*

Vilken skönhet och vilket djup detta påstående innehåller! Faktum är att en reell tropisk kurva är uppbyggd efter kombinatoriska spelregler, och det påminner starkt om trolleri att den kan ha ett förhållande till en reell algebraisk kurva! Vi ska inte göra det här, men Viros sats tillåter oss till och med att bestämma ekvationen för en reell algebraisk kurva som realiserar samma arrangemang som en given reell tropisk kurva. Vi använder nu denna sats för att visa existensen av två reella algebraiska kurvor, en av grad tre och en av grad sex.

Betrakta först den tropiska kurvan av grad tre som representeras i figur 14a. För ett lämpligt val av kanter att radera så illustrerar figur 14b och 14c de två etapperna i patchwork-proceduren. Vi har därmed bevisat existensen av en reell algebraisk kurva av grad tre som liknar bilden i figur 14d.

Låt oss till sist betrakta den tropiska kurvan av grad sex som representeras i figur 15a. Med ett lämpligt val av kanter att radera så ger patchwork-metoden kurvan i figur 15c. En reell algebraisk kurva av grad sex antar samma arrangemang som



Figur 13: Patchwork för en linje.

denna reella tropiska kurva som ursprungligen konstruerades på 60-talet av Gudkov, med betydligt mer komplicerade medel. Det kan förtjänas att nämnas att Hilbert år 1900 påstod att en sådan kurva inte kunde existera.

5.3 Amöbor

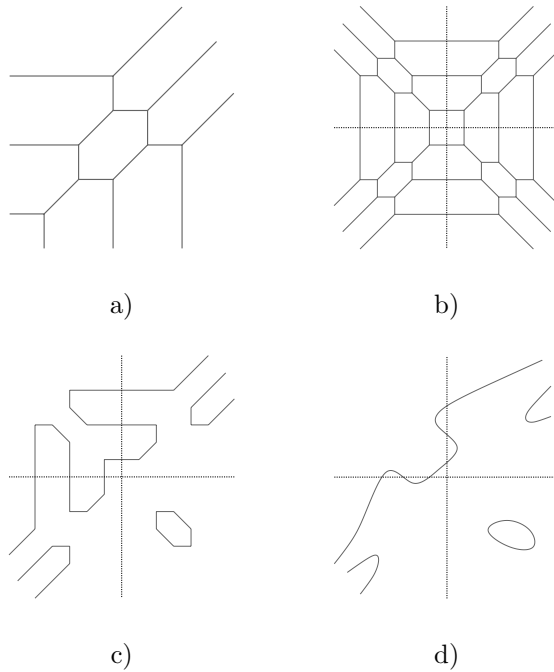
Dekvantiseringen av en linje är den idé som ligger bakom patchwork-metoden, men det fulla beviset för Viros sats är lite för tekniskt för att här skrivas ut i sin helhet. Vi nöjer oss med att skissa konturerna.

Eftersom kroppen \mathbb{R} inte är algebraiskt sluten, så ska vi inte arbeta med reella algebraiska kurvor, utan mer allmänt med *komplexa algebraiska kurvor*, alltså delmängder i $(\mathbb{C}^*)^2$ som definieras av en ekvation på formen $P(x, y) = 0$ där $P(x, y)$ är ett polynom med komplexa koefficienter (som ju även kan vara reella). För ett reellt positivt tal t så definierar vi avbildningen Log_t på $(\mathbb{C}^*)^2$ enligt följande:

$$\begin{aligned} \text{Log}_t \quad (\mathbb{C}^*)^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (z, w) &\longmapsto (\log_t |z|, \log_t |w|) \end{aligned}$$

Bilden $\mathcal{A}_t(P)$ av en algebraisk kurva med ekvation $P(x, y) = 0$ under Log_t -avbildningen kallas kurvans *amöba i bas t* . Följande sats bildar en fundamental länk mellan algebraisk geometri och tropisk geometri: varje tropisk kurva är ett gränsvärde av amöbor av komplexa algebraiska kurvor.

Sats 5.2 (G. Mikhalkin, H. Rullgård). *Låt $P_\infty(x, y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j$ vara ett tropiskt polynom, och välj för varje koefficient $a_{i,j}$ som är skilt från $-\infty$ ett komplext nollskilt tal $\alpha_{i,j}$. För alla $t > 0$, definierar vi det komplexa polynomet*



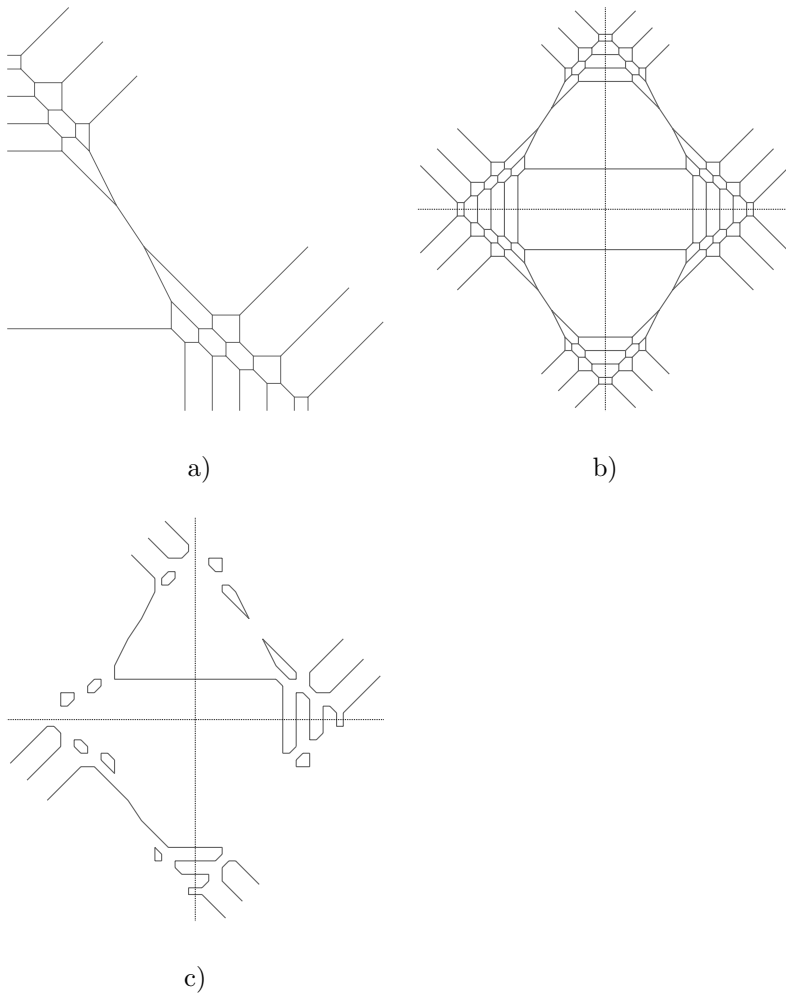
Figur 14: Patchwork för en kubisk kurva.

$P_t(x, y) = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} t^{-a_{i,j}} x^i y^j$. Då konvergerar amöban $\mathcal{A}_t(P_t)$ mot den tropiska kurvan definierad av $P_\infty(x, y)$ när t går mot oändligheten.

Dekvantiseringen av linjen i avsnitt 4.2 är ett specialfall av detta påstående: amöban i bas t för linjen med ekvation $t^0x - t^0y + t^01 = 0$ konvergerar mot den tropiska linjen definierad av ” $0x + 0y + 0$ ”. Man kan härleda Viros sats från föregående, genom att bland annat lägga märke till att om $\alpha_{i,j}$ är reella tal, så är kurvorna som definieras av polynomen $P_t(x, y)$ reella algebraiska kurvor.

5.4 Övningar

1. Konstruera en tropisk reell kurva av grad två som realiserar samma arrangemang som en hyperbel i \mathbb{R}^2 . Gör samma sak med en parabel. Kan man konstruera en reell tropisk kurva som har samma arrangemang som en ellips?
2. Visa med hjälp av patchwork att det finns en reell algebraisk kurva av grad fyra som har samma arrangemang som i figur 12b. Man kan få inspiration från konstruktionen som illustreras i figur 14.
3. Visa att för varje grad d så finns en plan reell algebraisk kurva med $d(d - 1)/2 + 1$ sammanhängande komponenter.



Figur 15: Gudkovs kurva.

6 Referenser

Slutligen, för att inte dränka läsaren i en uppsjö av mer eller mindre åtkomliga referenser, så hänvisar vi till inledande texter i tropisk geometri och dess tillämpningar. För mer specialiserade hänvisningar kan man vända sig till de referenser som citeras i texten. En varning här: vissa författare i tropisk algebra föredrar att använda sig av minimum istället för maximum!

Introduktionerna i tropisk geometri [BPS08] och [SS] vänder sig till läsare med en minimal matematisk bakgrund. Mer erfarna läsare kan också läsa böckerna [RGST05], [IMS07] eller [Gat]. För professionella geometriker kan vi rekommendera de toppmoderna texterna [Mik04] och [Mik06].

För att få veta mer om Hilberts 16e problem, patchwork, Maslovs dekvantisering och amöbor av algebraiska kurvor, hänvisar vi till texterna [Vir01], [Vir08], [IV96] och [Mik04] samt till webbsidan [Vir].

För att avsluta vår introduktion i tropisk geometri, vill vi poängtera att denna teori har effektiva tillämpningar inom ett antal olika områden förutom Hilberts 16e problem. Till exempel kan vi nämna enumerativ geometri, kombinatorik, spegelsymmetri och matematisk biologi.

Referenser

- [BPS08] N. Berline, A. Plagne, och C. Sabbah, redaktörer. *Géométrie tropicale* Éditions de l'École Polytechnique, Palaiseau, 2008. 128 sidor.
- [Gat] A. Gathmann. Tropical algebraic geometry. arXiv : math.AG/0601322.
- [IMS07] I. Itenberg, G. Mikhalkin, och E. Shustin. *Tropical Algebraic Geometry*, band 35 *Oberwolfach Seminars Series*. Birkhäuser, 2007.
- [IV96] I. Itenberg och O. Viro. Patchworking algebraic curves disproves the Ragsdale conjecture. *Math. Intelligencer*, 18(4):19–28, 1996.
- [Mik04] G. Mikhalkin. Amoebas of algebraic varieties and tropical geometry. *Different faces of geometry*, band 3 *Int. Math. Ser. (N. Y.)*, sidor 257–300. Kluwer/Plenum, New York, 2004.
- [Mik06] G. Mikhalkin. Tropical geometry and its applications. *International Congress of Mathematicians. Vol. II*, sidor 827–852. Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.
- [RGST05] J. Richter-Gebert, B. Sturmfels, och T. Theobald. First steps in tropical geometry. *Idempotent mathematics and mathematical physics*, band 377 *Contemp. Math.*, sidor 289–317. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [SS] D. Speyer and B. Sturmfels. Tropical mathematics. *Mathematics Magazine*. Kurs given på Clay Mathematics Institute, Park City, Utah, tillgänglig via <http://arxiv.org/abs/math.CO/0408099>.
- [Vir] O. Viro. <http://www.pdmi.ras.ru/~olegviro/patchworking.html>.
- [Vir01] O. Viro. Dequantization of real algebraic geometry on logarithmic paper. *European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000)*, band 201 *Progr. Math.*, sidor 135–146. Birkhäuser, Basel, 2001.
- [Vir08] O. Viro. From the sixteenth Hilbert problem to tropical geometry. *Japanese Journal of Mathematics*, 3(2), 2008.